

# Auxiliar 3: Cálculo Diferencial e Integral

**Profesor de Cátedra:** Leonardo Sanchez C.  
**Profesores Auxiliares:** Orlando Rivera Letelier y Matias Godoy Campbell  
Viernes 03 de Septiembre de 2010

**P1.** Un conductor demora 5 horas en recorrer 500 kilómetros entre Santiago y Concepción. Pruebe que existe un tramo del viaje de una longitud de 100 kilómetros que es recorrido en exactamente una hora.

**P2.** Se define la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{\sinh(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sabiendo que  $f$  es diferenciable en 0 y que  $g$  es una función tres veces diferenciable en 0, se pide determinar el valor  $g(0)$  y los valores de  $a$  y  $f'(0)$  en función de  $g'(0)$  y  $g''(0)$ .

**P3.** Encuentre la derivada de la función  $f(x) = \arcsin(2x-1) + 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)$ , y pruebe que  $f$  es constante en el intervalo  $(0, 1)$ .

**P4.** Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones derivables tales que  $f(0) = g(0) = 1$  y además

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = -xf(x) \quad \wedge \quad g'(x) = xg(x)$$

- Pruebe que la función  $f \cdot g$  es constante. Deduzca que  $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) > 0 \wedge g(x) > 0$ .
- Estudie crecimiento, máximos y mínimos de la función  $f$ .
- Calcule  $f''$  en función de  $f$ . Estudie convexidad y concavidad de  $f$ .
- Demuestre que  $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) (\exists \xi \text{ entre } 0 \text{ y } x) f(x) = -f''(\xi)$ .
- Estudie el crecimiento de  $f'$  y demuestre que  $f'$  es acotada en  $\mathbb{R}$ .
- Deduzca que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Bosqueje un gráfico de  $f$ .

**P5.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función dos veces derivable en todo  $\mathbb{R}$ . Dados  $a \in \mathbb{R}$  y  $h \in \mathbb{R}$ , se define

$$g(t) = f(t) + f'(t) \cdot (a + h - t)$$

Probar que  $(\exists c \in (a, a + h)) f(a + h) = f(a) + f'(a)h + hf''(c)(a + h - c)$ .

**P6.** Estudiar completamente la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}$$

Determinando ceros, continuidad, diferenciableidad, puntos críticos, crecimiento, máximos, mínimos, puntos de inflexión, convexidad y concavidad, asíntotas, recorrido y gráfico.