MA1002 – Cálculo Diferencial e Integral
Auxiliar nº 3
Pauta

P4. (a) $\Rightarrow$) $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq L$ (Definición de función Lipschitz)

$$-L \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq L$$

Tomando límite cuando $y \to x$:

$$-L \leq \lim_{y\to x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq L$$
$$-L \leq f'(x) \leq L$$
$$|f'(x)| \leq L$$

$\Leftarrow$) Sean $x, y \in (a,b)$. Por TVM (f continua y derivable), existe un $c \in (x,y)$ tal que

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$$

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = |f'(c)| \leq L$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq L \quad \Leftrightarrow \ f \text{ es una función Lipschitz de constante L}$$

(b).

$$f'(x) = g'(x)$$
$$f'(x) - g'(x) = 0$$
$$\big(f(x) - g(x)\big)' = 0$$
$$\Rightarrow f(x) - g(x) = cte$$

(d).

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Continuidad: Claramente, f es continua en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Examinemos su continuidad en x=0:

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$. Luego, f es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad: f es derivable en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Veamos si es derivable en x=0.

1) $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$

2) $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{x} = -1$

Como los límites laterales son distintos, el límite no existe y, por lo tanto, f no es derivable en x=0.

P5. $g(x) = f(x)e^{-kx}$

Notemos que $g(a) = g(b) = 0$

$g'(x) = f'(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx}$

Al ser un producto de funciones continuas y derivables, g es continua y derivable en (a,b). Además, como g(a)=g(b)=0, podemos usar el Teorema de Rolle:

Existe un $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$

$g'(c) = f'(c)e^{-kc} - kf(c)e^{-kc} = 0 \qquad /* \, e^{kc}$

$f'(c) - kf(c) = 0$
$f'(c) = kf(c)$

P6.(a) Recta Tangente: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
Recta Normal: $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0)$

$\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} = 2 \qquad / \frac{d}{dx}$

$\frac{nx^{n-1}}{a^n} + \frac{ny^{n-1}y\prime}{b^n} = 0$

$y' = -\frac{b^n}{a^n}\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}$

Evaluamos en el punto (a,b): $y'(a,b) = -\frac{b}{a}$

Recta Tangente: $y = -\frac{b}{a}x + 2b$

Recta Normal: $y = \frac{a}{b}x + b - \frac{a^2}{b}$

(b). $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x} = 1$

Recta Tangente: $y = x$
Recta Normal: $y = -x$

P7. (a) $\lim_{h\to 0} g(h) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f(x_0-h)+f(x_0)}{2h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h} - \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{2h}$

$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$

$=\frac{1}{2}f'(x_0) - \frac{1}{2}\left(-f'(x_0)\right) = f'(x_0)$

(b). Sea $h(x) = f(x) - g(x)$, continua y derivable en (a,b), con $h(a) = h(b) = 0$

Por el Teorema de Rolle: $\exists c \in (a,b),\ h'(c) = 0$

$h'(c) = f'(c) - g'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) = g'(c)$

P8. Ya sabemos que
$$p'(x) = p(x)f(x)$$
$$p''(x) = p'(x)f(x) + p(x)f'(x)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} p(x)p''(x) &= p'(x)p(x)f(x) + p^2(x)f'(x) \\ &< p'(x)p(x)f(x), \qquad ya\ que\ p^2(x)f'(x) < 0 \\ &= p'(x)p'(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto: $\quad p(x)p''(x) < (p'(x))^2$

P9. (a). Sea $x \in \mathbb{R}\backslash I \quad \Rightarrow \quad |x| > f(0)$

Luego: $\quad f(x) > |x| > f(0)$

(b). Sea $x \in I$. Como f es continua en I, e I es un intervalo cerrado, f alcanza un máximo y un mínimo en I.
Es decir: $\exists c \in I,\ f(x) \geq c,\ \forall x \in I$

Denotemos: $\quad \alpha = \min\ \{c, f(0)\}$
Claramente: $\ c, f(0) \geq \alpha$

Por lo tanto: $\forall x \in I, \quad f(x) \geq c \geq \alpha$
$\forall x \in \mathbb{R}\backslash I, \quad f(x) > f(0) \geq \alpha$

Finalmente: $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq \alpha$. Es decir, f alcanza un mínimo en $\mathbb{R}$.

P10. (a) Datos: velocidad de la abscisa: $\frac{dx}{dt} = 2$

Queremos calcular la velocidad de la ordenada, $\frac{dy}{dt}$
Por la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{x^2}2 = -\frac{2}{x^2}$$

Por lo tanto: $\frac{dy}{dt}(x = 1) = -2$

(b). Dato: $\frac{dV}{dt} = 40$
i) Para h=3m
$$V(h) = 80h^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = 160h\frac{dh}{dt} = 40$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4h} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dh}{dt}(h = 3) = \frac{1}{12}$$

P11.(a) Función objetivo: $S(a,x,y)=2(a+x)(a+y)$

Restricción: $axy=1000 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1000}{ax}$

Luego: $S(a,x)=2(a+x)\left(a+\frac{1000}{ax}\right)$

$S(a,x)=2(a^2+\frac{1000}{x}+ax+\frac{1000}{a})$

(b). $\frac{dS}{\boldsymbol{dx}}=2\left(-\frac{1000}{x^2}+a\right)=0$

$\frac{1000}{x^2}=a \quad \Rightarrow \quad x^*=\sqrt{\frac{1000}{a}}$

Justifiquemos que es un mínimo:

$\frac{d^2S}{dx^2}=\frac{4000}{x^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2S}{dx^2}(x=x^*)=4000\left(\frac{a}{1000}\right)^{3/2}>0 \quad \Rightarrow$ Corresponde a un mínimo

(c). Reemplacemos en la función S:

$$S(a)=2\left(a^2+\sqrt{1000a}+\sqrt{1000a}+\frac{1000}{a}\right)=2\left(a^2+2\sqrt{1000a}+\frac{1000}{a}\right)$$

$$\frac{dS}{da}=2\left(2a+\sqrt{\frac{1000}{a}}-\frac{1000}{a^2}\right)=0$$

Resolviendo la ecuación anterior obtenemos: $a^*=\sqrt[3]{250}$

Valores óptimos: $\boxed{\begin{array}{c} a^*=\sqrt[3]{250} \\ x^*=y^*=\sqrt{\frac{1000}{\sqrt[3]{250}}} \end{array}}$

P14. (a). Función objetivo: $U(r,\omega)=\frac{1}{2}mr^2\omega^2-\frac{GMm}{r}$

Restricción: $l=mr^2\omega \quad \Rightarrow \quad \omega=\frac{l}{mr^2}$

Reemplazamos en U:

$$U(r)=\frac{l^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}$$

$$\frac{dU}{dr}=-\frac{l^2}{mr^3}+\frac{GMm}{r^2}=0 \quad \Rightarrow \quad r^*=\frac{l^2}{GMm^2}$$

(b). $r=\frac{m^2r^4\frac{4\pi^2}{T^2}}{GMm^2}=\frac{4\pi^2}{T^2GM}r^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{r^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}$ Tercera Ley de Kepler

(c). $r=149.535.438\ kms \approx 150.000.000\ kms=1\ U.A.$