2010

sbh

[AUXILIAR EXTRA CONTROL 3 – MA1002]

Guía de problemas propuestos para resolver y discutir.

Problema 0.

$Para\ \alpha < 1, sea\ R\ la\ región\ encerrada\ por\ la\ curva\ x^{\alpha}, el\ eje\ OY\ y\ la\ recta\ tangente$
$a\ x^{\alpha} en\ el\ punto\ x = 1.$

$i)\ Demostrar\ que\ el\ área\ A(\alpha) de\ la\ región\ R\ está\ dada\ por\ A(\alpha) = \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}$

$ii)\ Demostrar\ que\ el\ volumen\ del\ sólido\ engendrado\ al\ rotar\ la\ región\ R\ en\ torno\ al\ eje\ OY$
$está\ dado\ por\ V(\alpha) = \pi \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{3(\alpha+2)}.$

$iii)\ Calcular\ el\ perímetro\ de\ la\ región\ R\ cuando\ \alpha = \dfrac{2}{3}.$

Problema 1.

$La\ parábola\ f(x) = -6x^2 + 5x + 1\ corta\ el\ eje\ Y\ en\ P_0. Considera\ sobre\ la$
$parábola\ el\ punto P\big(a, f(a)\big), a \geq 0.$
$Demuestra\ que\ el\ área\ comprendida\ entre\ la\ parábola\ y\ el\ segmento\ \overline{P_0P}\ es\ a^3.$

Problema 2.

$Considera\ una\ esfera\ sólida\ de\ radio\ R. A\ lo\ largo\ de\ un\ eje\ que\ pasa\ por\ el\ centro\ de\ la$
$esfera\ se\ hace\ una\ perforación\ cilíndrica\ de\ radio\ a.$
$Determinar\ el\ valor\ de\ a\ (en\ función\ de\ R) de\ modo\ que\ el\ volumen\ de\ la\ esfera\ extraido\ sea$
$igual\ al\ volumen\ restante.$

Problema 3.

$Considera\ la\ curva\ definida\ por\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}, a > 0.$
$Demuestra\ que\ la\ longitud\ de\ arco\ de\ la\ curva\ en\ el\ primer\ cuadrante\ esta\ dada\ por:$

$$s = a^{\frac{1}{3}} \int_0^a \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} dx\ .$$

Problema 4.

$Determina\ el\ área\ del\ manto\ de\ sólido\ engendrado\ al\ rotar, en\ torno\ al\ eje\ Y, el\ trozo\ de\ la$
$curva\ y = \dfrac{x^2}{2}, comprendido\ entre\ 0\ y\ 1.$

Problema 5.

$Calcular\ el\ área\ de\ la\ región\ del\ primer\ cuadrante\ limitada\ por\ las\ curvas\ de\ ecuaciones$
$y^2 = \dfrac{x}{1-x}\ , y^2 = 2(1-x) y\ el\ eje\ OX.$

Problema 6.

$Sea\ R\ la\ región\ del\ plano\ OXY\ limitada\ por\ la\ parábola\ y = x^2\ y\ la\ recta\ y = mx$
$(m > 0). Se\ pide\ encontrar\ el\ valor\ de\ m\ tal\ que\ los\ volúmenes\ generados\ por\ la$
$rotación\ de\ R\ en\ torno\ a\ OX\ y\ a\ OY\ sean\ iguales.$

Problema 7.

$Considera\ la\ curva\ plana\ \Gamma\ descrita\ por\ la\ siguiente\ ecuación\ en\ coordenadas\ polares$

$$\rho = a(1-\cos(\theta)), a > 0, \theta\ \epsilon\ [0, 2\pi]$$

$(a) Encontrar\ una\ parametrización\ para\ \Gamma. Graficar\ detalladamente\ y\ encontrar\ irregularidades.$
$(b) Calcular\ el\ largo\ y\ la\ parametrización\ en\ longitud\ de\ arco\ de\ \Gamma.$

Problema 8.

$Una\ partícula\ se\ mueve\ sosbre\ el\ manto\ del\ cilindro\ x^2+y^2=1, de\ forma\ que\ la$
$altura\ z(\theta) = cosh(\theta), con\ condiciones\ iniciales\ z(0)=1. Dónde\ (\rho,\theta,z)$
$representan\ las\ coordenadas\ cilíndricas\ del\ punto.$

$(a) Encontrar\ una\ parametrización\ de\ la\ trayectoria\ \ \Gamma\ descrita\ por\ la\ partícula.$
$(b)\ Calcular\ la\ longitud\ de\ \ \Gamma\ si\ \theta\ \epsilon[0,2\pi].$
$(c) Calcular\ los\ vectores\ tangente, normal\ y\ binormal, así\ como\ la\ curvatura\ y\ torsión\ de\ \Gamma.$

Problema 9.

$Sea\ \vec{\sigma}(t){:}\ [a,b] \to \mathbb{R}^3\ la\ parametrización\ de\ una\ curva\ regular\ \ \Gamma\ \subset \mathbb{R}^3.$
$Denotamos\ por\ T(t), N(t) y\ B(t) los\ vetores\ tangente, normal\ y\ binomial\ respectivamente.$
$Sea\ \kappa(t) la\ curvatura\ y\ \tau(t) la\ torsión. Suponga\ que\ la\ curva\ es\ plana\ y\ que$
$\kappa(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b].$

$La\ evoluta\ \Gamma' de\ \Gamma\ se\ define\ como\ la\ curva\ parametrizada\ por{:}$

$$\vec{r}(t) = \vec{\sigma}(t) + \frac{N(t)}{\kappa(t)}$$

1) $Suponga\ que\ \kappa'(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]. Pruebe\ que\ la\ evoluta\ es\ una\ curva\ regular\ y\ que$
$el\ vector\ tangente\ a\ la\ evoluta\ en\ t\ es\ paraleloa\ a\ N(t)$
2) $Ahora\ sea\ \Gamma\ una\ espiral\ logarítmica\ de\ parametrización{:}$
$\vec{\sigma}(t) = \left(ae^t\cos(t), ae^t sen(t)\right)\ t\epsilon\mathbb{R}.$
$Dónde\ a\ es\ una\ constante\ positiva. Calcule\ la\ evoluta\ \Gamma' de\ la\ espiral\ logarítmica\ \Gamma.$
$¿Qué\ puede\ decir\ sobre\ \Gamma'?$

Problema 10.

$Considere\ la\ sperficie\ S\ que\ se\ obtiene\ de\ intersectar\ la\ superficie\ z = \sqrt{x^2+y^2}$
$con\ el\ volumen\ dado\ por\ x^2+y^2-2ay \leq 0, dónde\ a > 0.$
1) $Encuentre\ una\ parametrización\ de\ S.$
2) $Conosidere\ ahora\ la\ curva\ \Gamma\ que\ se\ obtiene\ como\ intersección\ dee\ las\ superficies$
$z = \sqrt{x^2+y^2}\ \ y\ x^2+y^2-2ay = 0, dónde\ a > 0.$
$Encuentre\ una\ parametrización\ para\ \Gamma.$
3) $Suponga\ ahora\ que\ \Gamma\ es\ un\ alambre\ con\ densidad\ de\ masa$

$$\rho(x,y,z) = \frac{2a}{\sqrt{8a^2-x^2-y^2}}$$

$Calcule\ la\ masa\ del\ alambre.$

Problema 11.

$Considere\ la\ curva\ parametrizada\ por:$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} tcos(t) \\ tsen(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}\ con\ t\ \epsilon [a,b] y\ \varphi(t) = \int_0^t \sqrt{1+u^2}du$$

$i)$ $Demuestre\ el\ ángulo\ que\ forma\ la\ recta\ tangente\ a\ la\ curva\ con\ el\ eje\ Z\ es\ constante.$
$ii)$ $Demuestre\ que\ el\ vector\ normal\ es\ perpendicular\ al\ eje\ Z.$

Problema 12.

$Considere\ una\ función\ real\ de\ variable\ real\ f: [a,b] \to \mathbb{R}\ dos\ veces\ continuamente\ derivable.\ Sea\ \Gamma\ la\ curva\ definida\ por\ el\ grafo\ de\ f.$
$i)$ $Encuentre\ una\ parametrización\ de\ la\ curva\ y\ una\ expresión\ para\ su\ largo.$
$ii)$$Demuestre\ que\ la\ curvatura\ de\ \Gamma\ está\ dada\ por:$

$$\kappa(t) = \frac{f''(x)}{\left(1+f'^2(x)\right)^{3/2}}$$

Problema 13.

$Demostrar\ las\ siguientes\ relaciones:$
$i)$ $Una\ curva\ con\ \kappa(t) = 0\ es\ una\ recta.$
$ii)$ $Una\ curva\ con\ \tau(t) = 0\ es\ una\ curva\ plana. Si\ además\ \kappa(t) = cte, entonces\ la\ curva\ es\ un\ arco\ de\ circunferencia.$

Problema 14.

$Considere\ la\ curva\ \vec{\sigma}(t) = (tcos(t), tsen(t), t) t\epsilon\ \mathbb{R}$
$Calcular\ T, N\ y\ B.$

Problema 15.

$Una\ partícula\ sube\ por\ una\ superficie\ parabólica\ de\ ecuación\ x^2 + y^2 + z = \pi$
$siguiendo\ un\ camino\ \Gamma\ de\ modo\ de\ alcanzar\ una\ vuelta\ en\ torno\ a\ la\ superficie.$
$i)$ $Usando\ coordenadas\ cilíndricas, deducir\ una\ parametrización\ de\ \Gamma, sabiendo\ que\ se\ cumpl\ que\ \ z = a\theta, a > 0\ y\ \vec{r}(0) = (\sqrt{\pi}, 0, 0)$
$ii)$$determinar\ el\ vector\ Tangente\ a\ la\ curvatura\ para\ un\ punto\ cualquiera\ de\ esta.$

Problema 16.

$Parametrizar\ una\ curva\ plana\ cuyos\ puntos\ satisfacen\ que\ el\ producto\ de\ las\ distancias\ a\ 2\ focos\ en\ la\ abcisa, de\ coordenadas\ (a,0) y\ (-a,0) es\ cte\ igual\ a\ b = a^2. (Lemniscata)$

Problema 17.

$La\ curva\ de\ Viviani\ es\ la\ intersección\ de\ la\ esfera\ de\ Radio\ R\ con\ el\ cilindro\ circular\ de\ radio\ \frac{R}{2}\ cuya\ generatriz\ pasa\ por\ el\ centro\ de\ la\ esfera. Estudie\ dicha\ curva.$