Auxiliar EXTRA Control 2
MA1002-3 2010

Sebastián Balmaceda – Braulio Sánchez
Profesor: Leonardo Sánchez

Problema 0.

$Demostrar\ que$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}+\frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \ \leq \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt[4]{e}})$$

$Hint$: $considere\ P\ mínima\ equiespaciada\ en\ [0,1]$

Problema 1.

$Sea\ f\ continua\ y\ diferenciable\ en\ [a,b], tal\ que\ |f'(x)| \leq K, \forall x \in [a,b].$

$a)\ Use\ el\ T.V.M\ para\ deducir\ que\ \forall\ p\ \in P_{[a,b]}, |S(f,p)-s(f,p)| \leq K|p|(b-a)$

$donde\ |p| = \max\{x_i - x_{i-1}\}$

$b)\ Demuestre\ que\ f\ es\ una\ función\ Riemman\ integrable\ en\ [a,b]$

$c)\ Verifique\ que\ que\ \forall\ p\ \in P_{[a,b]}\ se\ tiene$:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}(S(f,p)-s(f,p))\right| \leq \frac{1}{2}K|p|(b-a)$$

Problema 2.

$a)\ Resolver\ el\ problema$

$$\min_{a\in\mathbb{R}} \int [x^2 - acos(nx)]^2 dx$$

Problema 3.

$Resolver$:

1. $\int_a^b cosec(x)dx\,, a \leq b$
2. $\int_0^1 (a^{2x}+3a^x-7)dx$
3. $\int \frac{3x-2}{x^2+x+1}dx$

Problema 4.

$a)\ Resolver\ las\ siguientes\ integrales\ indefinidas$

1. $I_n = \int sen^n(x)dx, n\ \epsilon\mathbb{N}$
2. $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$

$b)\ Usando\ los\ resultados\ \ calcular$:

1. $\int [sen^{24}(x) - \frac{23}{24}sen^{22}(x)]dx$
2. $\int [\frac{1}{(1+x^2)^{100}} - \frac{197}{198(1+x^2)^{99}}]dx$

Problema 5.

$i)$ *Calcular la siguiente recurrencia para* $n \in \mathbb{N}$.

$$I_n = \int sec^n(x)dx$$

$ii)$ *Calcular*

$$J = \int x^2\sqrt{x^2+a^2}dx\,, \qquad a \neq 0$$

Problema 6.

Sea f *una función con derivada continua en un intervalo* I *que contiene a* $[a,b]$.
Dado n, *se define la suma* S_n *por*:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)f'\left(a+i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

$a)$ *Demuestre que* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}[f^2(b)-f^2(a)]$

$b)$ *Calcular* $\lim\limits_{n\to\infty}[\ln \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+(\frac{i\pi}{n})^2)}]$

$c)$ *Calcular* $\lim\limits_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{n}\frac{arctg(\frac{i}{n})}{i^2+n^2}$

Problema 7.

$i)$ *Use una sustitución adecuada para probar que la integral*

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{sen(x)+cos(x)}dx$$

es igual a la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{sen}(x)}{sen(x)+cos(x)}dx$$

$ii)$ *Calcule* J.

Problema 8.

Considere la función $F\colon\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+2tcos(x)+t^2}dt$$

$i)$ *Demostrar que se cumple* $F(x) = \frac{x}{2sen(x)}$ $\forall x \neq 0$.

$ii)$ *Demostrar que* $F(x)$*es una función contínua en* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

$ii)$ *Demostrar que* $F(x)$ *tiene derivada contínua en* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.