Sem.Primavera 2010
Aux: Sebastián Balmaceda
Braulio Sánchez

MA1002 – Cálculo Diferencial e Integral
Auxiliar nº 7
Viernes 2010

P1. Considere la sucesión $a_n = \int_0^n q^x\,dx$, $0 < q < 1$.

(a) Explique por qué (a_n) está bien definida, o sea, por qué $f(x) = q^x$ es Riemann-integrable en $[0, n]$ y muestre que es estrictamente creciente.
(b) Calcule las sumas inferior y superior para $f(x) = q^x$ y la partición $P = \{0,1, \dots, n\}$.
(c) Utilice las sumas anteriores para obtener las siguientes cotas para (a_n)

$$q\frac{1-q^n}{1-q} < \int_0^n q^x dx < \frac{1}{1-q}$$

(d) Concluya que la sucesión converge y que $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ satisface

$$\frac{q}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}$$

P2. Demuestre que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{1/4}} + \frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e^{1/4}}\right)$$

HINT: Considere la partición $P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

P3. Demuestre que $\exists c \in (1, e)$ tal que

$$\int_1^e (\ln(x))^{n+1}\,dx = (\ln(c))^n, \qquad n \geq 1$$

Y concluya que $\int_1^e (\ln(x))^{n+1}\,dx \leq \ln(c)$.

P4. Considere la siguiente sucesión:

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\ln(n+i) - \ln(n)]$$

(a) Identifique esta sucesión como una suma de Riemann, determinando la función y la partición involucradas
(b) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$, usando la integral apropiada.

P5. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} q^{\left[\frac{\ln(x)}{\ln(q)}\right]}, & si\ x \in (0,1] \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$$

Donde $0 < q < 1$ es una constante fija
OBS: El paréntesis cuadrado denota parte entera.

Para calcular la integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ realice lo siguiente:

- **(a)** Demuestre que cuando $x \in (q, 1)$, entonces $f(x) = 1$. Luego, pruebe que si $x \in (q^n, q^{n-1})$, donde $n \in \mathbb{N}^*$, entonces $f(x) = q^{n-1}$. Bosqueje el gráfico de f.
- **(b)** Acote la integral A_n y calcule $\lim_{n\to\infty} A_n$, donde

$$A_n = \int_0^{q^n} f(x)dx$$

- **(c)** Calcule $\int_{q^n}^1 f(x)dx$
- **(d)** Use los resultados anteriores para probar lo pedido.

P6. Considere la siguiente sucesión:

$$S_n = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i\sqrt{n^2 - i^2}$$

- **(a)** Identifíquela como una suma de Riemann, determinando la función y partición involucradas.
- **(b)** Calcule $\lim_{n\to\infty} S_n$

P7. Sea $f: [1,5] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$

- **(a)** Calcule las sumas inferior y superior si $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una partición que sigue una progresión geométrica, es decir, $x_i = q^i$, donde $q = \sqrt[n]{5}$. Nota: su resultado debe quedar sólo en términos de n.
- **(b)** Use el resultado anterior y TFC para demostrar que $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{5} - 1\right) = \ln(5)$.

P8. Calcule los siguientes límites, reconociendo el término general como una suma de Riemann:

- **(a)** $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2n^2+ni}$
- **(b)** $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+i^2}$

P9. Considere una función $f: [a,b] \to [c,d]$ continua, biyectiva y estrictamente creciente.

- **(a)** Explique por qué f^{-1} es también creciente y estrictamente creciente.
- **(b)** Considere la partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a,b]$ y su correspondiente partición imagen $Q = \{f(x_0), \dots, f(x_n)\}$ del intervalo $[c,d]$. Demuestre que

$$S(f,P) + s(f^{-1},Q) = bd - ac$$

(c) Use apropiadamente las continuidades de f, f^{-1} para demostrar, a partir de (b), que

$$\int_c^d f^{-1} = bd - ac - \int_a^b f$$

P10. Sea $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - x$. Indique por qué la función es integrable en su dominio. Calcule la suma superior e inferior asociada a la función y una partición equiespaciada de $[0,2]$ de n términos. Deducir el valor de la integral $\int_0^2 f(x)\,dx$, sin usar el TFC.

P11. Sea f una función creciente en $[0,1]$. Probar que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}$$

P12. Calcule las siguientes límites, identificando las sumas como sumas de Riemann:

a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n\sqrt{n^2+i^2}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$

c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + 1\right]$

d) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3 + 5\left(\frac{2i}{n}\right)\right]$