

Auxiliar 05 MA1002-3 2010
PRIMITIVAS

Sebastián Balmaceda – Braulio Sánchez
Profesor: Leonardo Sánchez

Definición

(1) F continua en I , derivable en $\text{int}(I)$ es primitiva de $f \Leftrightarrow \forall x \in \text{int}(I), F'(x) = f(x)$

(2) $\int f = \{F + c, F \text{ es primitiva de } f\} \Leftrightarrow \{F + c, F' = f\} \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$

Observaciones:

$$\int f(x)'dx = f(x) + c$$

$$\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$$

$$\int [f(x) + \alpha g(x)]dx = \int f(x)dx + \alpha \int g(x)dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Teorema Cambio de Variable:

$$\text{Si } u = g(x) \Rightarrow \int f(u)du = \int f(g(x))g'(x)dx$$

Integración por partes

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \Leftrightarrow \int u dv = uv - \int v du$$

Problema 0.

Calcular las siguientes primitivas:

$$(1) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$$

$$(2) \int \frac{x}{1 + x^2} dx$$

$$(3) \int \frac{x^2}{1 + x^2} dx$$

$$(5) \int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$(6) \int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}} dx$$

$$(7) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx$$

$$(8) \int \cos(\ln[x])dx$$

$$(9) \int \sin^2(x)dx$$

$$(10) \int \frac{4x^3 - 3x^2 + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$$

Problema 1.

Calcular la primitiva de $\int \frac{dx}{e^{3x}\sqrt{1-e^{-2x}}}$

Problema 2.

Calcular la primitiva de $\int \frac{\sin(x)dx}{\sin(x) + \cos(x) + 1}$

Problema 3.

Demuestre que $I_n = \int (x+a)^n \sqrt{x+b} dx$ $a, b > 0$ satisface la recurrencia:

$$I_n = \frac{2}{3+2n} (x+a)^n (x+b)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n(b-a)}{3+2n} I_{n-1}$$

Problema 4.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ drivable, tal que $\int f(x) dx = f(x)$

(i) Deduzca que $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = x + c$

(ii) Concluya que $f(x) = e^{x+c}$

Problema 5.

Calcular, usando descomposición en fracciones parciales $\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)} dx$

Problema 6.

Calcular, aplicando integración por partes $\int \arcsen\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) dx$

Problema 7.

Encuentre una fórmula de recurrencia para

$$I_n = \int (x+1)^n \sqrt{x} dx$$

Problema 8.

Sea f una función infinitamente derivable en $\mathbb{R}$.

$$\text{Sea } I_n = \int e^{-x} f^{(n)}(x) dx$$

dónde $f^{(n)}$ denot la n – ésima derivada de f . Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Sea } I_n = I_{n+1} - e^{-x} f^{(n)}(x).$$

Problema 9.

Calcular la primitiva de $\int e^{-x} \ln(1+e^x) dx$