

EXPANSIONES DE TAYLOR

Polinomio de Taylor de grado n de la función f en torno a x_0

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Calcular este polinomio es muy fácil. Sólo deben derivar la función, evaluar en x_0 y meter datos en la fórmula anterior.

Ejemplo:

Calcule el polinomio de Taylor de orden 3 en torno a 0 de la siguiente función

$$f(x) = e^{\sqrt{2}\sin(x)}$$

Solución:

Primero calculamos las derivadas:

$$f'(x) = e^{\sqrt{2}\sin(x)}\sqrt{2}\cos(x) = \sqrt{2}\cos(x)f(x)$$

$$f''(x) = \sqrt{2}[-\sin(x)f(x) + \cos(x)f'(x)]$$

$$f'''(x) = \sqrt{2}[-\cos(x)f(x) - \sin(x)f'(x) - \sin(x)f'(x) + \cos(x)f''(x)]$$

$$f^{(4)}(x) = \sqrt{2}[\sin(x)f(x) - 3\cos(x)f'(x) - 3\sin(x)f''(x) + \cos(x)f'''(x)]$$

Ahora evaluamos en $x_0 = 0$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = \sqrt{2}$$

$$f''(0) = 2$$

$$f'''(0) = \sqrt{2}$$

Reemplazamos en la fórmula

$$T_3(x) = 1 + \sqrt{2}x + x^2 + \frac{\sqrt{2}}{6}x^3$$

TEOREMA DEL RESTO

El polinomio de Taylor corresponde a una aproximación de la función f en las vecindades del punto x_0 . Es decir $f(x) \approx T_n(x)$, en las vecindades de x_0 .

Sin embargo, podemos agregar al lado derecho un resto, de modo que la expresión anterior sea ahora una igualdad. El resto tienes la siguiente expresión:

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\epsilon)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Donde $\epsilon \in [x_0, x]$ si $x \geq x_0$ ó $\epsilon \in [x, x_0]$ si $x \leq x_0$

Para el ejemplo anterior:

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\epsilon)}{24} x^4$$

Además el resto cumple con lo siguiente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

También demostramos en clases que se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - T_n(x)| = 0.$$

¡¡¡¡ÉXITO MAÑANA!!!!