P1. Considere n reales estrictamente positivos, denotados por $b_1, b_2, \dots, b_n$. Demuestre que si $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que $b_1{}^x + \cdots + b_n{}^x \geq n$, entonces necesariamente $b_1 \cdot b_2 \cdots b_n = 1$.

HINT: Estudie si x=0 es o no un punto crítico de $f(x) = b_1{}^x + b_2{}^x + \cdots + b_n{}^x$.

SOLUCIÓN:

Por definición, x_0 es un punto crítico de f si $f'(x) = 0$.

Notemos que : $f(0) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$

Pero, por hipótesis, $f(x) \geq n, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Luego, $f(x) \geq f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Esto implica que x=0 es un mínimo de f (por definición de mínimo)

Por lo tanto, se cumple $f'(0) = 0$ (ya que x=0 es un mínimo)

Calculemos $f'(x)$:

$f'(x) = b_1{}^x \ln(b_1) + \cdots b_n{}^x \ln(b_n)$

Evaluamos en x=0:

$f'(0) = \ln(b_1) + \cdots + \ln(b_n) = 0$

$\ln(b_1 \cdot b_2 \cdots b_n) = 0$

$\Rightarrow \quad b_1 \cdot b_2 \cdots b_n = 1$