

MA1002 – Cálculo Diferencial e Integral
Auxiliar n° 4
Viernes 10 de Septiembre 2010

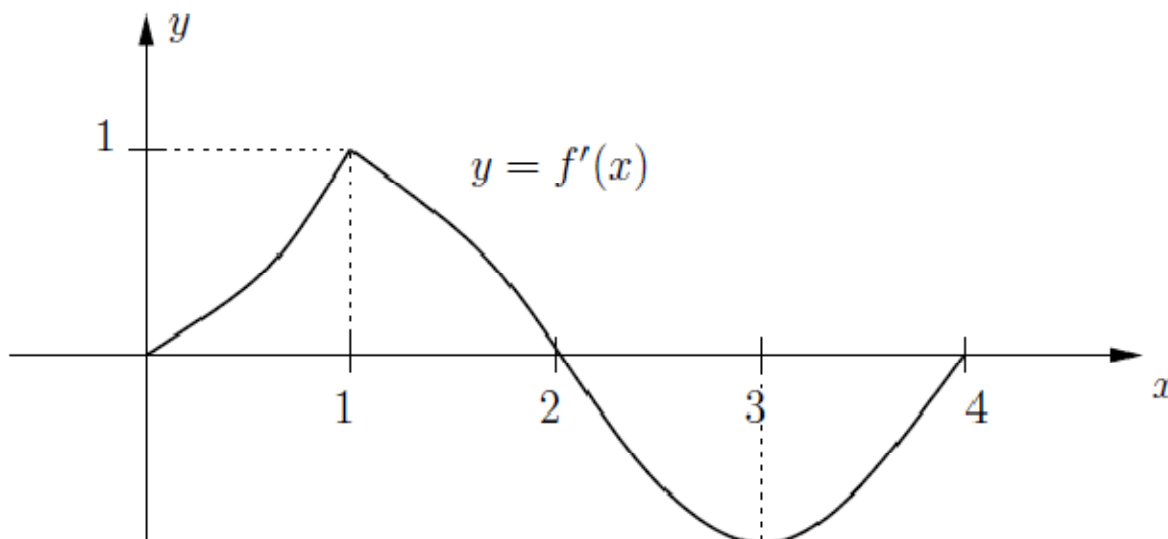
P1. Considere la siguiente función: $f(x) = (x+1) \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)$, definida en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

- Encuentre ceros y signos de f :
- Estudie las asíntotas horizontales de f . Encuentre los límites laterales cuando $x \rightarrow 0$ y $x \rightarrow -1$ y ya sea, repare la función para que sea continua, o bien, detecte si hay asíntotas verticales.
- Use TVM en la función $g(x) = \ln|x|$ en el intervalo $[x, x+1]$ para probar que

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x} \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

- Calcule la primera derivada de f . Use el resultado de la parte anterior para concluir sobre el crecimiento de f en $(-\infty, -1)$ y en $(0, \infty)$.
- Calcule $f''(x)$ e indique los intervalos donde f es cóncava y donde es convexa.
- Estudie los límites de $f'(x)$ cuando $x \rightarrow -1^+$ y cuando $x \rightarrow 0^-$. Usando el signo de la segunda derivada en $(-1, 0)$ concluya sobre la monotonía de f' en dicho intervalo y pruebe que existe un único punto donde $f'(x) = 0$. Bosqueje el gráfico de f .

P2. Se sabe que un bosquejo del gráfico de la derivada de una función $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ es el dado en la figura siguiente. Además se sabe que $f(0) = 1$.



Usando esta información encuentre el gráfico aproximado de la función f . Debe indicar precisamente, en que intervalos f es creciente, decreciente, cóncava o convexa, además donde alcanza sus máximos y mínimos locales o globales y donde tiene sus inflexiones. Debe probar además que f es acotada superiormente por 3.

P3. Sea $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$

- Pruebe que f es continua y estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$.
- Demuestre que $h = f \circ f$ es continua y creciente en $\mathbb{R}^+$.
- Sea la sucesión (a_n) definida por $a_0 = 1$ y $a_{n+1} = f(a_n)$.
Verifique que $a_0 < a_2 < a_3 < a_1$
Deduzca que la subsucesión (a_{2n}) es creciente y que (a_{2n+1}) es decreciente y que ambas subsucesiones son acotadas.
- Concluya que ambas subsucesiones convergen y pruebe que:

$$\lim (a_{2n}) = \lim (a_{2n+1}) = \sqrt{2}$$

P4. Estudiar completamente la función $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}$, $x \in \mathbb{R}$, indicando:

- Ceros, continuidad, eventuales reparaciones de discontinuidad, diferenciabilidad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos.
- Concavidad, puntos de inflexión, asíntotas, recorrido y gráfico.

P5. Estudiar completamente la función definida por: $f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3 \ln x}{x}$

Para esto:

- Establezca el dominio y encuentre por inspección un cero de f .
- Estudie asíntotas verticales y horizontales.
- Estudie asíntotas oblicuas.
- Calcule f' y determine sus ceros por inspección. Estudie crecimientos, máximos y mínimos.
- Calcule f'' . Estudie convexidades y encuentre puntos de inflexión.
- Haga un bosquejo del gráfico de f . Indique el recorrido de f .

P6. Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable con $g'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ y $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \cos(kg(x))$$

- Muestre que f, f', f'', g, g', g'' satisfacen la ecuación $f'' - f' \cdot \frac{g''}{g'} + (kg')^2 \cdot f = 0$
- Calcule $f^{(n)}(0)$ para $g(x) = x$

P7. a) A partir del desarrollo de Taylor en torno a 0 de $(x+a)^n$, con $n \geq 1$ un entero, demuestre la fórmula del binomio $(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$

b) Usando TVM, demuestre que $1 + \ln(x) < (x+1) \ln(x+1) - x \ln(x) < 1 + \ln(x+1)$, $\forall x > 0$

c) A partir de (b), demuestre la desigualdad:

$$n \ln(n) - (n-1) \leq \ln(1) + \ln(2) + \dots + \ln(n) < (n+1) \ln(n+1) - n, \quad \forall n \geq 1$$

- Desarrolle mediante un polinomio de Taylor con resto, en torno a $x_0 = 0$, la función $f(x) = \sinh(x)$. Calcule $\sinh(1)$ con tres términos no nulos del desarrollo anterior y estime una cota de error (puede usar $2,5 < e < 3$).

P8. Se define la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{\sinh(x)}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

Sabiendo que f es diferenciable en 0 y g es dos veces diferenciable en 0 se pide determinar, justificando, al valor de $g(0)$, y los valores de $a, f'(0)$ en función de $g'(0)$ y $g''(0)$.

P9. Sea $f(x)$ continua en $[0, \infty)$, diferenciable en $(0, \infty)$ y tal que $f(0) = 0$ y $f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}^+$.

Use TVM para probar que $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ en $\mathbb{R}^+$ y deduzca que la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es creciente en $\mathbb{R}^+$.

P10. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y dos veces derivable en (a, b) . Sea $p(x)$ un polinomio de grado 1. Si $p(a) = f(a)$ y $p(b) = f(b)$, se pide probar que para cada $\bar{x} \in (a, b)$, $\exists \varepsilon \in (a, b)$ tal que

$$f(\bar{x}) = p(\bar{x}) + \frac{f''(\varepsilon)}{2}(\bar{x} - a)(\bar{x} - b)$$

Para esto, proceda como sigue:

a) Dado $\bar{x} \in (a, b)$, justifique que existe un único $\lambda \in \mathbb{R}$ para el cual la función

$$h(x) = f(x) - p(x) - \lambda(x - a)(x - b) \text{ se anula en } \bar{x}.$$

b) Aplique TVM para $h(x)$ en $[a, \bar{x}]$ y en $[\bar{x}, b]$, justificando sus hipótesis.

c) Utilice los resultados de (b) y TVM o Teorema de Rolle en $h'(x)$ para probar que existe $\varepsilon \in (a, b)$ tal que $h''(\varepsilon) = 0$

d) Utilice (c) y la definición de h para calcular el valor de λ en función de ε . Ocupe este resultado y la parte (a) para concluir.

P11. Considere el real fijo $a \in (0, 1)$. Use TVM para demostrar que $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ se cumple que $\sin(ax) < \sin(x)$. Use esto para demostrar la siguiente desigualdad:

$$(\cos(x))^a \leq \cos(ax), \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$$

INDICACIÓN: Estudie el crecimiento de la función $f(x) = \cos(ax) - (\cos(x))^a$

P12. Sea f una función infinitamente derivable en $\mathbb{R}$ tal que $|f^{(k)}(x_0)| \leq 1, \forall k \in \mathbb{N}, x_0 \in \mathbb{R}$ fijo. Demuestre que $\forall x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - T^n(x)| = 0$$

Donde $T^n(x)$ es el polinomio de Taylor de f de orden n en torno a x_0