$$Problemas$$
$$"Derivadas"$$

Problema 1.

Calcule la primera y segunda derivada de las siguientes funciones:

(a) $\dfrac{e^x}{\operatorname{sen}(x)}$

(b) $x^2 \ln(\cos(x))$

(c) $\operatorname{arc}\cos(\sqrt{1-x^2})$

Problema 2.

Estudie la diferenciabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x\operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & x > 0 \\ \alpha & x = 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

Analice qué ocurre si en lugar de $x\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ se define como $x^2\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ para $x > 0$. ¿puede ser f dos veces diferenciable?

Problema 3.

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones que satisfacen la relación

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \qquad f(x) \geq f(y) + g(y)(y-x)$$

(a) Muestre que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad g(x)(y-x) \geq f(x) - f(y) \geq g(y)(y-x)$$

(b) Probar que si g es una función acotada, entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$.

(c) Probar que si g es continua en x_0, entonces f es diferenciable en x_0 y $f'(x_0) = -g(x_0)$.

Problema 4.

Utilizando la derivada de la función $f(x) = x^{2n}$, demuestre que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Hint: Recuerde la fórmula de Leibniz para la derivada n-ésima del producto de funciones: $(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$.

Problema 5.

Demuestre que si $f''(x_0)$ existe, entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)$$

Use esta expresión para probar que si f tiene un mínimo en x_0, entonces $f''(x_0) \geq 0$. Con ayuda de esto último, determine si 0 es un mínimo de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$