PAUTA AUX N°3

CÁLCULO DIF. E INTEGRAL.

$\boxed{P1}$

(a) $f(x) = \dfrac{e^x}{sen(x)}$

$$f'(x) = \frac{e^x sen(x) - e^x \cdot cos(x)}{sen^2(x)} = \frac{e^x}{sen(x)}\left(\frac{sen(x) - cos(x)}{sen(x)}\right) = f(x)\,(1 - cot(x))$$

$$f''(x) = [f(x)\,(1-cot(x))]' = f'(x)\,(1-cot(x)) + f(x)\,(1-cot(x))'$$

$$= f(x)(1-cot(x))(1-cot(x)) + f(x) \cdot -\left(\frac{cos(x)}{sen(x)}\right)'$$

$$= f(x)\,(1-cot(x))^2 + f(x) \cdot - \frac{[-sen^2(x) - cos^2(x)]}{sen^2(x)}$$

$$= f(x)\,(1-cot(x))^2 + f(x) \cdot \frac{1}{sen^2(x)}$$

$$= f(x)\,(1-cot(x))^2 + f(x)\, cosec^2(x)$$

$$= f(x)\,[(1-cot(x))^2 + cosec^2(x)$$

(b) $f(x) = x^2 ln(cos(x))$

$$f'(x) = (x^2)' ln(cos(x)) + x^2 \cdot (ln(cos(x)))'$$

$$= 2x\, ln(cos(x)) + x^2 \cdot \frac{1}{cos(x)} \cdot (cos(x))'$$

$$= 2x\, ln(cos(x)) - x^2 \frac{sen(x)}{cos(x)}$$

$$= 2x\, ln(cos(x)) - x^2 tg(x).$$

$$f''(x) = 2\,\left((x)' ln(cos(x)) + x \cdot (ln(cos(x)))'\right) - \left((x^2)' tg(x) + x^2 \cdot (tg(x))'\right)$$

$$= 2\left(ln(cos(x)) + x \cdot \frac{1}{cos(x)} \cdot (cos(x))'\right) - \left(2x\, tg(x) + x^2 sec^2(x)\right)$$

$$= 2\,\left(ln(cos(x)) - x \cdot tg(x)\right) - 2x\, tg(x) - x^2 sec^2(x)$$

$$= 2\, ln(cos(x)) - 4x\, tg(x) - x^2 sec^2(x).$$

(c) $f(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)'$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (1-x^2)'$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot -2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

Como f es continua en 0 (por composición de fnes. continuas), es válido preguntarse si f es diferenciable en 0. Calculamos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right) - \cancel{\arccos(1)}^{\,0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{x}$$

$$\overset{x=\operatorname{sen}(y)}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\arccos\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(y)}\right)}{\operatorname{sen}(y)}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\arccos(\cos(y))}{\operatorname{sen}(y)}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{sen}(y)}$$

$$= 1$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x<0. \end{cases}$$

Càlculemos $f''(x)$:

si $x>0$, $f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{-(\sqrt{1-x^2})'}{(1-x^2)}$

$$= \frac{-1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (1-x^2)'$$

$$= \frac{-1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot -2x$$

$$= \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

análogamente, si $x<0$,

$$f''(x) = \frac{-x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

¿Existirá $f''(0)$? Notemos que

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -1$$

Como los límites laterales son distintos, tenemos que f' es discontinua en 0

$\Rightarrow f'$ no puede ser derivable en 0 $\Rightarrow$ ¡$f''(0)$ no existe!

$\boxed{P2}$ Primero que todo, f es continua en $0 \iff \alpha = 0$,

pues $\lim\limits_{x\to 0} x\,\text{sen}(\frac{1}{x}) = 0$, ya que $|x\,\text{sen}(\frac{1}{x})| \leq |x|\cdot 1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0$

Si $x > 0$, entonces $f(x) = x\,\text{sen}(\frac{1}{x})$ es diferenciable por álgebra y composición de funciones diferenciables. Además se tiene que

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x)'\text{sen}(\tfrac{1}{x}) + x\cdot(\text{sen}(\tfrac{1}{x}))' \\
&= \text{sen}(\tfrac{1}{x}) + x\cdot\cos(\tfrac{1}{x})\cdot\tfrac{-1}{x^2} \\
&= \text{sen}(\tfrac{1}{x}) - \cos(\tfrac{1}{x})\cdot\tfrac{1}{x}
\end{aligned}
$$

Si $x<0$, $f(x) = -x^2$ también es diferenciable y $f'(x) = -2x$.

Si $x=0$, estudiamos los límites laterales que definen a la eventual derivada:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x\,\text{sen}(\frac{1}{x}) - 0}{x-0} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\text{sen}(\tfrac{1}{x}) \quad \text{¡NO EXISTE!}
\end{aligned}
$$

Como uno de los límites laterales no existe, entonces la derivada de f en 0 no existe.

Si tuviéramos que $f(x) = x^2\text{sen}(\frac{1}{x})$ cuando $x>0$, nuevamente sería derivable para $x>0$ (propuesto: verificar que $f'(x) = 2x\,\text{sen}(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$.)

En $x=0$ tendríamos:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\text{sen}(\frac{1}{x})}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} x\,\text{sen}(\tfrac{1}{x}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2}{x} = 0
$$

$\therefore$ la derivada existe y es $f'(0) = 0$.

¿puede ser f dos veces diferenciable en 0? Veamos si f' es continua en 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x\,\text{sen}(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ no existe.

$\therefore$ f' no es continua en $0 \Rightarrow f'$ no es diferenciable en 0.

$\boxed{P3}$ Sabemos que $\forall x,y \quad f(x) \geq f(y) + g(y)(y-x) \quad (*)$

(a) Intercambiando los roles de x e y en $(*)$, se tiene que

$$f(y) \geq f(x) + g(x)(x-y)$$

$$\Rightarrow \quad f(y) - f(x) \geq g(x)(x-y)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - f(y) \leq -g(x)(x-y)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - f(y) \leq g(x)(y-x) \qquad (**)$$

Además, de $(*)$ se tiene que

$$f(x) - f(y) \geq g(y)(y-x) \qquad (\Delta)$$

Juntando $(**)$ con (Δ) se conduce la desigualdad

$$g(x)(y-x) \geq f(x) - f(y) \geq g(y)(y-x). \qquad (\bigstar)$$

(b) Si g es acotada, $\exists\ m, M \in \mathbb{R}$ tq $\forall z \in \mathbb{R} \quad m \leq g(z) \leq M$.
Luego, acotando en $(\bigstar)$, tenemos que

$$M(y-x) \geq f(x) - f(y) \geq m(y-x)$$

Si $y \to x$: $\quad M(y-x) \to 0, \qquad m(y-x) \to 0$

$$\Rightarrow \quad f(x) - f(y) \xrightarrow[y \to x]{} 0$$

es decir $\displaystyle\lim_{y \to x} f(y) = f(x) \quad \forall x$, i.e f es continua en todo $\mathbb{R}$.

(c) De la desigualdad $(\bigstar)$, si tomamos $x = x_0$, queda:

$$g(x_0)(y-x_0) \geq f(x_0) - f(y) \geq g(y)(y-x_0)$$

Si $y - x_0 < 0$, dividimos $y - x_0$ (la desigualdad cambia de sentido)

$$g(x_0) \leq \frac{-(f(y) - f(x_0))}{y - x_0} \leq g(y)$$

$$\Rightarrow \quad -g(x_0) \geq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \geq -g(y)$$

si $y \to x_0^-$: $\quad -g(x_0) \to -g(x_0), \qquad -g(y) \to -g(x_0)$ (pues g es continua en x_0)

Por lo tanto, el límite $\lim\limits_{y\to x_0^-} \dfrac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$ existe y es igual a $-g(x_0)$

Análogamente, se obtiene que $\lim\limits_{y\to x_0^+} \dfrac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} = -g(x_0)$

$\therefore$ $f'(x_0)$ existe y vale $-g(x_0)$.

$\boxed{P4}$ $f(x) = x^{2n}$

$f'(x) = 2n\, x^{2n-1}$

$f''(x) = 2n(2n-1)\, x^{2n-2}$

$\vdots$

$$f^{(k)}(x) = 2n(2n-1)\cdots(2n-(k-1))\cdot x^{2n-k}$$

$$= \frac{(2n)!}{(2n-k)!}\, x^{2n-k}$$

$$= \frac{(2n)!}{(2n-k)!\,k!}\cdot k!\, x^{2n-k}$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(x) = \binom{2n}{k} k!\, x^{2n-k}. \qquad \forall\, k = 0, \dots, 2n$$

En particular si $k=n$, $x=1$, $\boxed{f^{(n)}(1) = \binom{2n}{n}\cdot n!}$ $(*)$

Por otro lado,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n}\right)$$

$$n\cdot(n-1)\cdots\underline{(n-(n-k-1))}\cdot x^{n-(n-k)}$$

$k+1$

$$= \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n\cdot x^n\right)$$

$$(\text{Leibniz}) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k}{dx^k}(x^n)\cdot\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{k!}x^{n-k}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}x^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot n!\,x^{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 n!\,x^{n}$$

Si $x=1$, $\boxed{f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 n!}$ $(**)$

Juntando $(*)$ con $(**)$, se obtiene la igualdad buscada.

$\boxed{P5}$ Si f es dos veces derivable en x_0, entonces

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2) \qquad (\star)$$

donde $o(h^2)$ es una función tal que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{o(h^2)}{h^2} = 0$.

Tomando $-h$ en la fórmula $(\star)$ se tiene

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}(-h)^2 + o((-h)^2) \qquad (\star\star)$$

Sumando $(\star)$ con $(\star\star)$:

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 + 2o(h^2)$$

$$\Rightarrow \quad f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0) = f''(x_0)h^2 + 2o(h^2) \quad / \cdot \frac{1}{h^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0) + 2\frac{o(h^2)}{h^2}$$

Tomando límite cuando $h \to 0$, se concluye la igualdad que buscábamos.

Si x_0 es un mínimo de f, entonces

$$\frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = \frac{\overbrace{(f(x_0+h) - f(x_0))}^{\geq 0} + \overbrace{(f(x_0-h) - f(x_0))}^{\geq 0}}{h^2} \geq 0$$

entonces al tomar límite cuando $h \to 0$, queda $f''(x_0) \geq 0$.

Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Si $x=0$ fuera mínimo, se debería cumplir que $f''(0) \geq 0$.

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^3}$$

$$\overset{\text{L'Hop}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - x\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{x\operatorname{sen}(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}(x)}{3x} = -\frac{1}{3} < 0 \quad \therefore \ 0 \text{ No es un mínimo de } f.$$