MA1002 – Cálculo Diferencial e Integral
Auxiliar nº 3
Viernes 03 de Septiembre 2010

P1. Considere la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x ln(x)}{x-1}, & x > 0, x \neq 1 \\ \alpha, & x = 1 \end{cases}$$

(a) Determine α para que f sea continua.
(b) Analice la existencia de f' en $(0, +\infty)$. Calcúlela.
(c) Determine la continuidad de f' en $(0, +\infty)$.

P2. Determinar el conjunto de parámetros $a, b, c > 0$ para los cuales la siguiente función es continua en todo $\mathbb{R}$. Estudie su diferenciabilidad y calcule su función derivada.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\ sen(bx)}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \dfrac{\ln(c+(a+b)x)}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

P3. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces continuamente derivable en $\mathbb{R}$, es decir, con segunda derivada continua, y tal que $f(0) = 0$. Se define la función g mediante la ley

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que g es una función continua, derivable y con derivada continua en todo $\mathbb{R}$.

P4. (a) Probar que una función $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) es Lipschitz de constante L si y sólo si $|f'(x)| \leq L, \forall x \in (a, b)$.

(b) Sean $f, g: (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables con $f'(x) = g'(x), \forall x \in (a, b)$. Probar que f y g difieren en una constante

(c) Sea $p(x)$ un polinomio con k raíces reales distintas. Mostrar que si $\alpha \neq 0, q(x) = p(x) - \alpha p'(x)$ posee al menos k raíces reales distintas.

(d) Estudie la continuidad y derivabilidad en $x_0 = 0$ de la función $f(x) = e^{-|x|}$.

P5. Sea una función $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b) = 0$. Demuestre que $\forall k \in \mathbb{R}, \exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = kf(c)$.

HINT: Estudie la función $g(x) = f(x)e^{-kx}$.

P6. (a) Determine las ecuaciones de las rectas normal y tangente en el punto (a,b)a la curva $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$, $a,b > 0$.

(b) Determine las ecuaciones de las rectas normal y tangente en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right), x \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad x = 0 \end{cases}$$

P7. (a) Sea una función $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), Sea $x_0 \in (a,b)$. Se define:

$$g(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Demuestre que $\lim_{h\to 0} g(h) = f'(x_0)$.

(b) Si f, g son dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Demuestre que:

(i) Si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, entonces $\exists \alpha \in (a,b),\ f'(\alpha) = g'(\alpha)$.
(ii) Si para algún $c \in (a,b),\ f(c) = g(c)$, entonces $\exists \beta \in (a,b),\ f''(\beta) = g''(\beta)$.

P8. Considere n reales distintos entre sí, denotados por $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Se definen las funciones f y P por:

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n}$$

Denotemos por $A = \{x \in \mathbb{R} : P(x) \neq 0\}$:

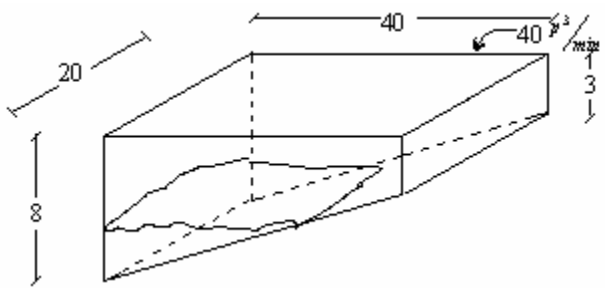
(a) Pruebe que $\forall x \in A,\ f'(x) < 0$.
(b) Pruebe que $\forall x \in A,\ \frac{P'(x)}{P(x)} = f(x)$ y que $P(x) \cdot P''(x) < (P'(x))^2$.

P9. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, tal que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > |x|$. La idea del problema es demostrar que f tiene un mínimo global. Para esto, proceda como sigue:

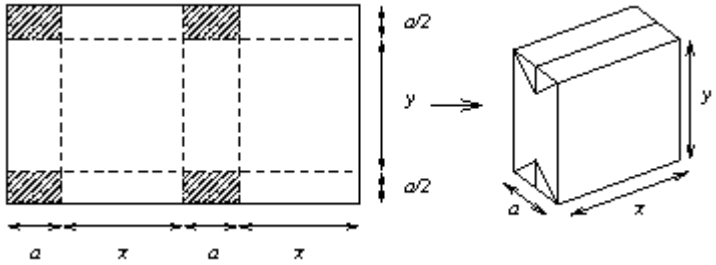
(a) Sea $I = [-f(0), f(0)]$. Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash I,\ f(x) > f(0)$.
(b) Concluya que f tiene un mínimo global.

P10. (a) Un punto en el plano se mueve sobre la curva $y = \frac{1}{x}$ de modo que su abscisa aumenta a razón de $2\frac{u}{seg}$. Calcular la velocidad a la que se mueve la ordenada cuando pasa por el punto $(1,1)$.

(b) Una piscina tiene 40 m de largo y 20 metros de ancho. En su extremo más hondo, su profundidad es de 8 m , y 3 m en el menos profundo. Si se sabe que la piscina está siendo llenada con caudal de $40\frac{m^3}{min}$. ¿Con qué rapidez se eleva el nivel de agua cuando la altura es de 3 m y 6m?



P11. Un envase de Tetra-Pak se fabrica plegando un rectángulo de cartón como indica la figura (las regiones achuradas corresponden a los pliegues de las esquinas).



Se desean determinar las dimensiones óptimas de a, x, y que minimicen la superficie del rectángulo original para un volumen total de 1000 (1 litro).

(a) Encuentre una expresión para la superficie sólo en función de las cantidades a, x.

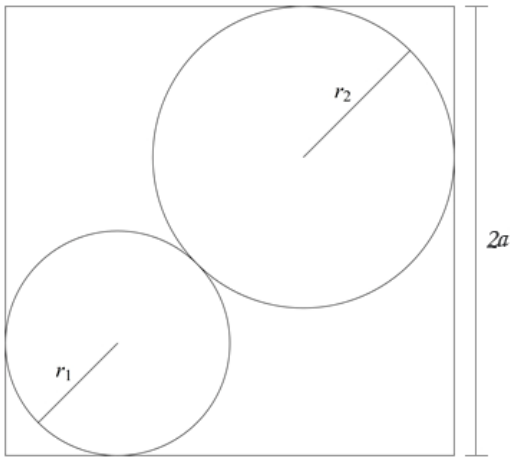
(b) Tomando a como parámetro conocido, demuestre que el valor $x = x(a)$ que minimiza dicha superficie es $x = \sqrt{\frac{1000}{a}}$. Justifique que se trata de un mínimo.

(c) Use (b) para obtener una expresión $S(a)$ para la superficie en función solamente de a y luego determine el valor mínimo de esta función, explicando por qué es un mínimo. Encuentre loa valores óptimos para a, x, y.

P12. (a) Un grupo de físicos se encuentra en una estación espacial chilena estudiando la órbita del cometa "UCHC1". Ellos han determinado que la órbita es parabólica de ecuación $y = \frac{x^2}{4}$, tomando el origen en la estación espacial y midiendo las longitudes en Unidades Astronómicas Apropiadas (UAA). En este mismo sistema, el Sol está en la posición $(1,2)$.
Se sabe que, por su composición química, "UCHC1" explotaría si su distancia al Sol fuera menor o igual a 1 UAA. Determine si el cometa explotará o no.

(b) Calcule el área del máximo rectángulo que es posible inscribir, con sus lados paralelos a los ejes corrdenados, en la figura encerrada por las curvas $3y = 12 - x^2$ y $6y = x^2 - 12$.

P13. En un cuadrado de lado $2a$ se inscriben dos circunferencias de radios r_1, r_2, centradas en la diagonal del cuadrado, tangentes entre sí y ambas tangentes al cuadrado.



(a) Demuestre que $r_1 + r_2 = \frac{4a}{2+\sqrt{2}}$.

(b) Determine los valores de r_1, r_2 de modo que la suma de ambas áreas sea máxima. Justifique.

P14. Para un planeta orbitando en torno a una estrella, se define el potencial efectivo U como la energía cinética angular más la energía potencial gravitatoria, es decir:

$$U(r,\omega) = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - \frac{GMm}{r}$$

Donde: m: masa del planeta
M: masa de la estrella
ω :velocidad angular del planeta
T: período del planeta
$G = 6.67x10^{-11}\left[\frac{Nm^2}{kg^2}\right]$: constante de gravitación Universal

Por tratarse de un problema de fuerzas centrales, el momento angular $l = mr^2\omega$ se mantiene constante durante todo el movimiento. Se sabe además que el planeta orbita en aquel punto donde el potencial efectivo alcanza un mínimo.

Se le pide determinar lo siguiente:

(a) Tomando el momento angular l como un valor conocido, encuentre el radio orbital del planeta en función de l, m, M, G.
(b) Si la órbita es circunferencial, la velocidad angular es constante y vale $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Usando que $l = mr^2\omega$, deduzca la tercera ley de Kepler.
(c) Considerando que la órbita de la Tierra es una circunferencia, calcule el radio orbital terrestre, sabiendo que la masa del sol vale $M = 1.99x10^{30}\ kgs$.