$Auxiliar\ 02\ MA1002$
$Secci$ó$n\ 03-2010$
"$Continuidad$"

Profesor: Leonardo Sánchez
Aux: Sebastián Balmaceda H
Braulio Sánchez

Problema 0.
$Sea\ f,g:[0,1]\to[0,1]\ funciones\ continuas\ con\ g(0)=0\ y\ f(1)=0.$
$Demuestre\ que\ existe\ un\ x_0\ \in[0,1]\ tal\ que\ f(x_0)=g(x_0).$

Problema 1.
$Sea\ f:\mathbb{R}\to\ \mathbb{R}\ \ una\ función\ continua. Sea\ (a_n)una\ sucesión\ en\ [a,b], no\ necesariamente\ convergente$
$tal\ que\ \ \lim_{n\to\infty} f(a_n)=l. Demostrar\ que\ \exists\ \hat{x}\ \in[a,b]tal\ que\ l=f(\hat{x})$

Problema 2.
$Dado\ a\ \geq 0, sea\ f_a(x)=ax^3+x-1$

$a)\ Demuestre\ la\ existencia\ y\ unicidad\ de\ z\in\ [0,1]\ tal\ que\ f_a(z)=0$
$b)\ Sea\ g\ [0,\infty)\to[0,1]\ la\ función\ que\ a\ cada\ a\ \geq 0\ le\ asocia\ la\ solución\ z\ \in\ [0,1]\ de\ f_a(z)=0$
$Pruebe\ que\ g\ es\ continua$

$Hint$: $Puede\ ser$ útil $demostrar\ que\ si$

$$au^3+u-1=0$$
$$bv^3+v-1=0$$

$$Con\ a,b\ \geq 0, entonces\ \ [b(u^2+uv+u^2)+1](u-v)=u^3(b-a)$$

Problema 3.
$Considere\ F\ y\ G\ continuas\ en\ x_0\ tales\ que\ F(x_0\ )<\ G(x_0).$
$Demuestre\ que\ \exists\delta>0\ tal\ que\ \forall x\ \in(x_0+\delta,x_0-\ \delta),\qquad F(x)<G(x)$

Problema 4.
$Se\ define\ la\ función\ en\ \mathbb{R}$

$$\tanh(x)=\frac{e^x-\ e^{-x}}{e^x+\ e^{-x}}$$

$a)\ Verificar:(i)\tanh\ es\ continua\ en\ \mathbb{R}\ \ (ii)\tanh(0)=0\ \ \ (iii)-1<\tanh(x)<1\ \forall x\in\mathbb{R}.$
$b)\ Pruebe\ que\ si\ n\to\ \infty\ entonces \tanh(n)\to 1\ y\ que \tanh(-n)\to\ -1.$
$c)\ Demuestre\ que\ \forall y\in]-1{,}1[,\exists x\in\mathbb{R}\ tal\ que \tanh(x)=y.$
$d)\ Demuestre\ que\ la\ ecuación \tanh(x)=\cos(x)\ tiene\ infinitas\ soluciones\ en\ \mathbb{R}.$

Problema 5.
$Si\ h(x)=\ x^3-x^2+x\ demuestre\ que\ \exists\ x_0\ \in\mathbb{R}\ tal\ que\ h(x_0)=10.$
$Justifique.$