$Auxiliar\ 01\ MA1002$
$Secci\acute{o}n\ 03 - 2010$
"$Continuidad$"

Leonardo Sánchez
Sebastián Balmaceda H
Braulio Sánchez

Problema 0.

$Dada\ la\ función\ h(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}, con\ a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}, a \neq 0, d \neq 0. Analice\ su\ continuidad.$

Problema 1.

$Dada\ la\ función\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 2\ \ si\ x \in [0,3] \\ ax + b\ si\ x\ \in [3,5] \end{cases}\quad calcular\ a\ y\ b\ de\ modo\ que:$

$a)\ y = ax + b\ pase\ por\ el\ origen\ y\ la\ función\ f\ sea\ continua\ en\ x = 3.$

$b)\ y = ax + b\ tenga\ pendiente - 2\ y\ f\ sea\ continua\ en\ x = 3.$

Problema 2.

$a)\ Sea\ \ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ una\ función\ continua\ en\ x_0 = 0\ y\ tal\ que\ \forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{1}{n}\right) > 0.$

$Demuestre\ que\ f(0)\ no\ puede\ ser\ estrictamente\ negativo.$

$b)\ Sea\ h: (0, \infty) \to [0,1] una\ función\ que\ satisface\ h(xy) = h(x) + \ h(y)$

$Demuestre\ que\ si\ h\ es\ continua\ en\ x = 1, entonces\ h\ es\ continua\ en\ todo\ su\ dominio.$

$c)\ Sea\ f, g: [0,1] \to [0,1]\ funciones\ continuas\ con\ g(0) = 0\ y\ f(1) = 0.$

$Demuestre\ que\ existe\ un\ x_0\ \ \in [0,1]\ tal\ que\ f(x_0) = g(x_0).$

Problema 3.

$a)\ Sea\ \ f: [0,1] \to \mathbb{R}\ \ definida\ de\ la\ forma\ f(x) = \begin{cases} x & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & si\ x\ \in \mathbb{I} \end{cases}\quad Demuestre\ que:$

1) $f\ es\ inyectiva\ \ \in\ [0,1].$
2) $f\big(f(x)\big) = x\ para\ todo\ x\ \ es\ inyectiva\ \ \in\ [0,1].$
3) $f\ sólo\ es\ continua\ en\ x = \frac{1}{2}$

$b)\ Sea\ \ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \ función\ continua. Pruebe\ que\ si\ Im(f) \subseteq \mathbb{Q}, entonces\ f\ es\ constante.$

Problema 4.

$Se\ dice\ que\ una\ función\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ es\ lipchitziana\ de\ constante\ k\ \in \mathbb{R}\ si\ verifica\ la\ propiedad$

$$\forall\ x, y\ \in \mathbb{R}; |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$$

$Pruebe\ que\ una\ función\ lipchitziana\ de\ constante\ k \geq 0\ es\ continua\ en\ su\ dominio.$

Problema 5.

Sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)} & si\ x>0\\ (x-\alpha)^2 & si\ x<0\\ \beta & si\ x=0\end{cases}$$

Encuentre todos los valores de α y β para los cuales f es continua en todo $\mathbb{R}$.

Problema 6.

Dado $a\ \geq 0$, sea $f_a(x)=ax^3+x-1$

> *a) Demuestre la existencia y unicidad de $z\in\ [0,1]$ tal que $f_a(z)=0$*
> *b) Sea $g\ [0,\infty)\to[0,1]$ la función que a cada $a\ \geq 0$ le asocia la solución $z\ \in\ [0,1]$ de $f_a(z)=0$*
> *Pruebe que g es continua*

Hint: Puede ser útil demostrar que si

$$au^3+u-1=0$$
$$bv^3+v-1=0$$

$$Con\ a,b\ \geq 0,\ entonces\ \ [b(u^2+uv+u^2)+1](u-v)=u^3(b-a)$$

Problema 7.

Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin((1-a)x)}{x} & si\ x<0\\ b(x-\alpha)^2 & si\ 0\ \leq x\leq 1\\ \dfrac{\sin(a(x-1))}{\ln(x)} & si\ x>1\end{cases}$$

Dónde a y b son parámetros reales con $a\neq 0$, $a\neq 1$

a) ¿Qué puede decir de la continuidad de f en los intervalos $(-\infty,0),(0,1),(1,\infty)$? Justifique.

b) Encuentre una relación entre a y b equivalente a la continuidad de f en 0.

c) Encuentre una relación entre a y b equivalente a la continuidad de f en 1.

d) Encuentre los valores de a y b, con $a\neq 0$, $a\neq 1$, tales que f sea continua en $\mathbb{R}$.

Problema 8.

Estudie la continuidad en los puntos 0 y 1 de la función $f(x)=\ [x]x$.

Problema 9.

Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $r_n>0$ sucesión tal que $r_n\to 0$.

Probar que f es continua en x^* si y solo si la sucesión

$$s_n=\sup_{x}\{|f(x)-f(x^*)|:|x-x^*|\leq r_n\}$$

converge a cero.