MA1002-2- Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Felpe Célèry C.
Auxiliares: Bastián Bahamondes, Iván Fuentes.

Auxiliar N°10

26 de Octubre de 2010

P1 (a) Calcule la superficie del manto del paraboloide engendrado por la rotación de la parábola $y = \sqrt{x}$ en torno al eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

(b) Determinar qué función f continua, tal que $f(x) > 0$ para $x > 0$, satisface la propiedad siguiente: $\forall x \in [0, \infty)$ se define $R_x = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq x, 0 \leq y \leq f(t)\}$ y al hacer rotar esta región en torno a los ejes OX y OY, los volúmenes de los sólidos de revolución V_{OX} y V_{OY} obtenidos son iguales.

P2 Pruebe que la fórmula para el cálculo de la longitud de una curva descrita en coordenadas paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$ está dada por $L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$. Usando esta fórmula, pruebe que la longitud de una curva en coordenadas polares se calcula como $L = \int_{\phi_0}^{\phi_f} \sqrt{r^2(\phi) + [r'(\phi)]^2} d\phi$.

P3 Considere la espiral de ecuación paramétrica $x(t) = e^{2t} \cos(t)$, $y(t) = e^{2t} \operatorname{sen}(t)$.

(a) Encuentre el largo L obtenido de variar el parámetro t entre 0 y 2π y el área obtenida al variar t entre 0 y π.

(b) Encuentre t_0 tal que la longitud de curva al variar el parámetro t entre 0 y t_0 sea igual a la mitad del largo L obtenido en la parte anterior.

P4 Sea $f : [0,) \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y la longitud de la curva $y = f(x)$ entre 0 y x es igual a $x^2 + 2x - f(x)$.

(a) Determinar f.

(b) Calcular el área bajo la curva $y = f(x)$ y su longitud entre $x = 0$ y $x = 1$.

P5 En este problema probaremos que dado un intervalo $[0, T]$, $T > 0$, siempre podremos encontrar una función $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ y acotada por 1, cuya longitud de arco sea tan grande como queramos. Para ello, seguiremos los siguientes pasos:

(a) Definamos, para cada $k \in \mathbb{N}$, las funciones $f_k : [0, T] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = \operatorname{sen}(\frac{2k\pi}{T} x)$. Exprese (no calcule) $L_0^T(f_k)$, i.e. la fórmula de la longitud de arco asociada a f_k.

(b) Pruebe que $\forall k \in \mathbb{N}$, $L_0^T(f_k) \geq 4k$ y concluya el resultado.