MA1002-2- Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Felpe Célèry C.
Auxiliares: Bastián Bahamondes, Iván Fuentes.

Algunas identidades que pueden ser obtenidas a partir del cálculo diferencial e integral

Septiembre de 2010

Calculemos la primitiva $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$, $a > 0$. En este caso, nos conviene hacer un cambio de variables para eliminar la raíz. Observando la forma que tiene la expresión que aparece dentro de ella, notamos que podemos recurrir a las siguientes identidades:

(1) $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$

(2) $\cosh^2(x) = 1 + \operatorname{senh}^2(x)$

Si elegimos la identidad (1), el cambio de variables adecuado es $x = a\tan(u)$, con lo cual $dx = a\sec^2(u)du$. De este modo, el término que queda dentro de la raíz es $a^2(1+\tan^2(x)) = \sec^2(x)$. Entonces nos queda:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx &= \int \frac{a\sec^2(u)}{\sqrt{a^2(1+\tan^2(u))}}du \\
&= \int \sec(u)du \\
&= \ln|sec(u) + tg(u)| + C \\
&= \ln\left|\sqrt{1+\tan^2(u)} + tg(u)\right| + C \\
&= \ln\left|\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{x}{a}\right| + C
\end{aligned}$$

Si alternativamente elegimos la identidad (2), hacemos el cambio de variables $x = a\operatorname{senh}(u)$. Con esto, $dx = a\cosh(u)du$ y el cálculo de la primitiva se reduce a:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx &= \int \frac{a\cosh(u)}{\sqrt{a^2(1+\operatorname{senh}^2(u))}}du \\
&= \int du \\
&= u + C \\
&= \operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{a}\right) + C
\end{aligned}$$

Hemos encontrado dos primitivas para la misma función. Según un teorema visto en clases, estas difieren en una constante, es decir existe $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{a}\right) - \ln\left|\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{x}{a}\right| = K \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para encontrar el valor de K, basta evaluar en algún punto, por ejemplo, en $x = 0$:

$$\operatorname{arcsenh}\left(\frac{0}{a}\right) - \ln\left|\sqrt{1+\left(\frac{0}{a}\right)^2} + \frac{0}{a}\right| = K$$

De lo anterior se obtiene que $K = 0$. Notando además que

$$\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{x}{a} \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

podemos eliminar el módulo que aparece en el logaritmo y así obtenemos la identidad

$$\operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left(\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{x}{a}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

en particular para $a = 1$:

$$\operatorname{arcsenh}(x) = \ln(\sqrt{1 + x^2} + x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Usando nuevamente las identidades (1) y (2) puede demostrarse similarmente que la primitiva $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$, donde $a > 0$ y $x \geq a$ conduce a la fórmula

$$\operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right) \qquad \forall x \geq a$$

, de la cual se deduce que

$$\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad \forall x \geq 1$$

Obs: El dominio de $\operatorname{arccosh}(x)$ es $[1, +\infty)$, pues la función $\cosh(x)$ tiene un mínimo global en $x = 0$ y por lo tanto $\cosh(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Por último, encontraremos una fórmula que relaciona a las funciones $\operatorname{arc\,sen}(x)$ y $\arccos(x)$. Sus derivadas son:

$$\operatorname{arc\,sen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$\operatorname{arc\,cos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Con esto, tenemos que $\forall x \in (-1, 1)$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{arc\,sen}'(x) + \operatorname{arc\,cos}'(x) = 0 \\ \Rightarrow &(\operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{arc\,cos}(x))' = 0 \\ \Rightarrow &(\operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{arc\,cos}(x)) = C \end{aligned}$$

para alguna constante $C \in \mathbb{R}$. Evaluando en $x = 0$, obtenemos que $\operatorname{arc\,sen}(0) + \operatorname{arc\,cos}(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = C$, de donde concluimos la fórmula

$$\operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{arc\,cos}(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in [-1, 1]$$