MA1002-2- Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Felipe Célèry C.
Auxiliares: Bastián Bahamondes, Iván Fuentes.

Auxiliar Nº2

24 de Agosto de 2010

P1 Considere la función $f(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot \dfrac{arctan(x)}{x}$ definida en $[-1,1] \setminus 0$.

(i) Defina f en 0 tal que f sea continua.

(ii) Pruebe que f en $[-1,1]$ es uniformemente continua.

P2 Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $(0,1]$.

(i) ¿Es f continua?

(ii) ¿Es f uniformemente continua?

P3 Demostrar que la ecuación $e^{-x} + sen(x) = x$ posee al menos una solución real.

P4 (i) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $\bar{x} = 0$ y además cumple que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus 0, h(\frac{1}{n}) > 0$. Demuestre que h(0) NO puede ser estrictamente negativo.

(ii) Sea $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que cumple la propiedad $g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$. Demuestre que si g es continua en $\bar{x} = 1$, entonces g es continua en todo su dominio. Es prudente demostrar previamente que $g(1) = 0$.

P5 Sean $f; g : [0,1] \to [0,1]$ continuas y epiyectivas. Demuestre que $\exists c \in [0,1], f(c) = g(c)$.

P6 Este problema pretende mostrar que para toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua; ésta alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$ si es que consideramos que la función cumple con $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq |x|$. Para demostrar esto, considere $y_0 = f(0)$; $I = [-y_0, y_0]$.

(i) Demostrar que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus I, f(x) > y_0$.

(ii) Concluir que f alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$ en un punto de I.