MA1002-2- Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Felpe Célèry C.
Auxiliares: Bastián Bahamondes, Iván Fuentes.

Auxiliar Nº1

17 de Agosto de 2010

P1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Sea $\{a_n\}$ una sucesión en $[a, b]$, no necesariamente convergente, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$. Demuestre que existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $l = f(\bar{x})$.

P2 Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, con un mínimo global único en el punto $\bar{x}$ y que satisface $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Si $\{x_n\}$ es una sucesión que tiene la propiedad

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{n}$$

Se pide:

(i) Pruebe que si $\left\{x_{\varphi(n)}\right\}$ es una subsucesión convergente a $l \in \mathbb{R}$, entonces $l = \bar{x}$.

(ii) Pruebe que $\{x_n\}$ tiene alguna subsucesión convergente a $\bar{x}$.

P3 (i) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $L > 0$ que satisface

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Pruebe que f es continua.

(ii) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $\bar{x}$. Pruebe que existe $\delta > 0$ tal que f está acotada en $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.

P4 Considere:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 0, x \neq 1 \\ \alpha & x \neq 1 \end{cases}$$

Encuentre α para que f sea continua.

P5 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}((1-a)x)}{x} & x < 0 \\ b(x-a)^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\operatorname{sen}(a(x-1))}{\ln(x)} & x > 1 \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \notin \{0, 1\}$.

(i) Estudie la continuidad de f en los intervalos $(-\infty, 0), (0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

(ii) Encuentre una relación entre a y b equivalente a la continuidad de f en 0.

(iii) Encuentre una relación entre a y b equivalente a la continuidad de f en 1.

(iv) Encuentre los valores de a y b que hacen que f sea continua en 0 y 1 simultáneamente.

$\boxed{\text{P6}}$ Estudie la continuidad de la función $f(x) = [x]x$ en los puntos $\bar{x} = 0$ y $\bar{x} = 1$. *Obs:* $[x]$ denota la parte entera de x.

$\boxed{\text{P7}}$ Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(i) Pruebe que f no es continua en ningún punto.

(ii) Sea $g(x) = f(x)x$. Probar que f es continua sólo en $\bar{x} = 0$.

(iii) Sea $h(x) = f(x)\operatorname{sen}(x)$. Determine dónde h es continua.