

MA1002-2- Cálculo Diferencial e Integral**Profesor:** Felipe Célery C.**Auxiliares:** Bastián Bahamondes, Iván Fuentes.**Auxiliar N°14**

23 de Noviembre de 2010

P1 Estudie la convergencia de las siguientes series:

- | | | |
|--|--|--|
| (a) $\sum_{n \geq 1} \frac{ \sin(n) }{n^2}$ | (e) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$ | (i) $\sum_{n \geq 1} e^{-n^2}$ |
| (b) $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt[n]{n+1}}$ | (f) $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n \ln(n) [\ln(\ln(n))]^p}$ | (j) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2} \right)$ |
| (c) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ | (g) $\sum_{n \geq 1} (n^{\frac{1}{n}} - 1)^n$ | (k) $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \arctan \left(\frac{1}{2n+1} \right)$ |
| (d) $\sum_{n \geq 1} \frac{1 + \sqrt{n}}{(n+1)^3 - 1}$ | (h) $\sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ | (l) $\sum_{n \geq 2} \sin \left(n\pi + \frac{1}{\ln(n)} \right)$ |

P2 Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de términos no negativos y tales que $\sum a_n$ converge.

- (a) Pruebe que la serie $\sum a_n^2$ converge.
- (b) Si además $a_n \neq 1 \forall n \in \mathbb{N}$, pruebe que las series $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ y $\sum \frac{a_n}{1-a_n}$ son convergentes.

P3 Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones tales que $a_n, b_n > 0 \forall n \geq n_0$, y sea $c_n = b_n - b_{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Pruebe que:

- (a) Si existe una constante positiva r tal que $\forall n \geq n_0, c_n \geq r > 0$, entonces $\sum a_n$ converge.
- (b) Si $c_n \leq 0 \forall n \geq n_0$ y si $\sum \frac{1}{b_n}$ diverge, entonces $\sum a_n$ también diverge.

P4 Considere la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definida por:

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n} \quad a_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- (a) Pruebe que la serie $\sum (-1)^{n-1} a_n$ converge. En lo que sigue, denotaremos por S_N a su suma parcial.
- (b) Justifique por qué S_{2N-1} es convergente y concluya que existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \ln(N) \right) = \gamma$$

Obs: al número γ se le llama constante de Euler-Mascheroni.

- (c) Considere ahora la *Serie Armónica Alternante*: $\sum (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$. Llamemos A_N a sus sumas parciales. Pruebe que

$$A_{2N} = \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$$

y concluya que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \ln(2)$$