MA1002-2- Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Felpe Célèry C.
Auxiliares: Bastián Bahamondes, Iván Fuentes.

Auxiliar N°12

09 de Noviembre de 2010

P1 Considere la curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \cos(t) \\ e^t \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(a) Muestre que Γ se encuentra contenida en el cono de ecuación $y^2 + z^2 = x^2$.

(b) Encuentre curvatura, torsión y los vectores $\hat{T}(t), \hat{N}(t), \hat{B(t)}$.

P2 Una curva está parametrizada por las ecuaciones

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ a\operatorname{sen}(t) \\ f(t) \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

donde $a > 0$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función infinitamente derivable. Determine todas las funciones f de modo que el vector normal a la curva sea siempre perpendicular al eje OZ (i.e. $\hat{N}(t) \cdot \hat{k} = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$)

P3 Sea $\vec{\sigma} : [0, l_0] \to \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva Γ. Supondremos que $\vec{\sigma} \in \mathcal{C}^3$.

(a) Pruebe que $\tau(s) = \dfrac{\langle \vec{\sigma}'(s) \times \vec{\sigma}''(s), \vec{\sigma}'''(s) \rangle}{\|\vec{\sigma}''(s)\|^2}$

(b) Use lo anterior para calcular la torsión de la hélice $\vec{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$ con $t \in [0, 4\pi]$. Note que para aplicar la fórmula anterior, debe usar la parametrización en longitud de arco.

P4 Considere la curva Γ que se forma al interceptar el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con la esfera $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

(a) Encuentre una parametrización para Γ. **Indicación:** use coordenadas cilíndricas.

(b) Encuentre el vector tangente $\hat{T}(t)$ y exprese (no calcule) el largo total de la curva.