MA1002-2- Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Felpe Célèry C.
Auxiliares: Bastián Bahamondes, Iván Fuentes.

Auxiliar Nº9

18 de Octubre de 2010

P1 El propósito de este problema es calcular el valor de la expresión $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$, y de paso probar que esta serie es convergente. Para ello, se propone una demostración que consiste en las siguientes etapas:

(a) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Muestre que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{sen}(\lambda x)dx = 0$$

(b) Encuentre dos reales a y b tales que

$$\int_0^{\pi} (ax + bx^2)\cos(kx)dx = \frac{1}{k^2}$$

(c) Demuestre que $\forall x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, se tiene la igualdad

$$\sum_{k=1}^{N} \cos(kx) = \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{2N+1}{2}x\right)}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

Hint: Recuerde que $\mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)-\mathrm{sen}(\alpha-\beta)}{2}$

(d) Concluya que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

P2 Considere la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

(a) Calcule el área del primer cuadrante encerrada por la curva que define $f(x)$ y el eje OX, entre las abscisas de su cero y su máximo.

(b) Calcule el volumen obtenido de rotar el área de la parte (a) en torno al eje OY.

P3 Para $\alpha \in (0, 1)$, denotamos por R la región encerrada por la curva x^{α}, el eje OY y la recta tangente a x^{α} en el punto $x = 1$.

(a) Pruebe que el área de la región R está dada por $A(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}$. Encuentre el valor de α que maximiza dicha área.

(b) Pruebe que el volumen del sólido engendrado por la rotación de la región R en torno al eje OY está dado por $V(\alpha) = \pi\frac{\alpha(1-\alpha)}{3(\alpha+2)}$.

P4 (a) Bosqueje la curva de ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $a > 0$. En particular indique dominios, intersección con los ejes, crecimientos y concavidades.

(b) Calcule el área de la región R encerrada por las curvas $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ y $x + y = a$.

(c) Calcule el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de la región R en torno al eje OX.