Tópicos en Microeconomía — Profesor: J. Escobar

Primavera 2010

Tarea

1 Redes Sociales

P1. Este problema explora los incentivos de oligopolistas a compartir tecnologías que reducen costos. Suponga que dada una red g entre n firmas, los costos marginales de la firma i son $c_i(g) = a - bn_i(g)$, donde $n_i(g) = |N_i(g)|$ y $a > (n-1)b > 0$. Las utilidades de las firmas se determinan a como resultado de la interacción oligopólica, dada la demanda $p = \alpha - Q$, con $\alpha > 0$.

(a) Muestre que para cada red g, si α es suficientemente grande y la competencia es Cournot, entonces cada firma produce

$$q_i(g) = \frac{\alpha - a + nbn_i(g) - b\sum_{j\neq i} n_j(g)}{n+1}.$$

Deduza que la única red estable de a pares es la red complete, si los costos de formar links $c > 0$ son pequeños.

(b) Suponga ahora que la competencia es Bertrand y que los precios ofertados son en unidades discretas. Calcule la única red estable de a pares.

P2. Considere un juego entre n agentes que están conectados a través de una red social g. Cada agente escoge una contribución $x_i \in \mathbb{R}_+$ de un bien público. El pago del jugador i es

$$u_i(x_i, x_{-i}) = f(x_i + \sum_{j \in N_i(g)} x_j) - cx_i$$

donde $N_i(g)$ son los vecinos de i en la red social g. Suponemos que f es continuamente diferenciable, estrictamente concave, y $c > 0$.

(a) Interprete el modelo.

(b) Caracterice el conjunto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de equilibrios de Nash del juego.

2 Juegos Repetidos y Relaciones

P3. Considere un mercado de n firmas que producen un bien homogéneo a costo 0. En cada ronda del juego infinitamente repetido, un estado público $s_t \in S \subseteq \mathbb{R}_+$ es realizado, S siendo un conjunto finito. El estado se realiza independiente en cada periodo, con $q(s) \in]0,1[$ siendo la probabilidad de que el estado sea igual a $s \in S$ en cada ronda. Despues de obervar el estado s^t, as firmas compiten fijando precios p_i^t, de modo tal que la cantidad demandada en t es $s^t - \min\{p_1^t, \ldots, p_n^t\}$. La cantidad se divide uniformemente entre las firmas que fijan el precio mínimo.

(a) Muestre que en el único equilibrio de Nash del juego estático, las firmas fijan precio igual a 0. Muestre que el precio monopólico es $s/2$ y que estados más altos dan mayores utilidades monopólicas.

(b) Muestre que en el juego repetido, cada firma puede asegurarse un pago igual a 0 independiente de la estrategia que sigan sus rivales.

(c) Buscamos ahora un equilibrio colusivo estacionario. Es decir, buscamos una función $p\colon S \to \mathbb{R}$ tal que en cada t, dado el estado público s^t, las firmas fijan precio $p(s^t)$ en el camino de equilibrio. Muestre que tal función debe satisfacer

$$(1-\delta)\frac{s-p(s)}{n}p(s) + \delta v^* \geq (1-\delta)(s-p(s))p(s) + \delta 0,\ \forall s \in S \tag{2.1}$$

donde $v^* = \sum_{s' \in S} \frac{s'-p(s')}{n} p(s')$ es el pago de continuación esperado de cada firma en el camino del equilibrio.

(d) Nos interesa encontrar la función de precios $p\colon S \to \mathbb{R}_+$ que maximiza el pago esperado v^* de cada uno de los miembros del cartel. Argumente que si δ es suficientemente cercano a 1, entonces $p(s) = \frac{s}{2}$ para todo s.

(e) Suponemos ahora que δ es pequeño de modo tal que la regla de precios monopólica no se puede alcanzar en un equilibrio perfecto en subjuegos. Muestre que existe $\hat{s}$ tal que para todo $s \geq \hat{s}$, la restricción de incentivos 2.1 está activa.

(f) Muestre que en el rango $s \geq \hat{s}$, los precios del cartel son contracíclicos

(g) Explique el tradeoff que debe resolver el cartel al momento de diseñar $p\colon S \to \mathbb{R}_+$ y muestre como ese tradeoff resulta en precios contraciclicos.

P4. Considere un equipo de dos jugadores que en cada ronda juegan el siguiente dilema del prisionero:

	C	D
C	$2,2$	$-1,3$
D	$3,-1$	$0,0$

La tecnología de monitoreo es tal que en cada ronda se genera una señal $y \in \{\bar{y}, \underline{y}\}$

$$\pi(\bar{y}, a) = \begin{cases} p & \text{si } a = CC \\ q & \text{si } a = CD \text{ o } a = DC \\ r & \text{si } a = DD \end{cases}$$

con $0 < r < q < p < 1$. El factor de descuento es $\delta < 1$ y nos restringimos al estudio de estrategias públicas.

(a) Consideramos estrategias de memoria finita. Sea σ^i una estrategia para el jugador i tal que i juega C en el periodo t si la señal en $t-1$ es $y^{t-1} = \bar{y}$, mientras que juega D en la ronda t si la señal en $t-1$ es $y^{t-1} = \underline{y}$. Muestre que estas estrategias son un equilibrio ssi

$$\frac{1}{3p - 2q - r} \leq \delta \leq \frac{1}{p + 2q - 3r} \tag{2.2}$$

(b) Muestre que cuando q es cercano a r, las estrategias no pueden ser de equilibrio. Explique.

(c) Encuentre un conjunto autogenerante W tal que $(0,0) \notin W$, cuando la condición (2.2) se tiene.

P5. Considere el siguiente modelo de generaciones traslapadas. Agentes $t = 0, 1, \ldots$ escogen una acción $a_t \in \{0, 1\}$ secuencialmente, observando todas las acciones de los agentes que movieron previamente. El pago del agente t es $va_{t+1} - ca_t$, donde $v > c > 0$

(a) Muestre que existe un equilibrio en el cual $a_t = 1$ se juega en cada t.

(b) Suponga ahora que cada agente t solo observa la acción del agente $t-1$. Muestre que en cualquier equilibrio en estrategias puras del modelo, 0 se juega en cada ronda. Explique.

(c) (EXTRA) Qué ocurre si consideramos estrategias mixtas? Puede existir cooperación entre las distintas cohortes? Explique.

P6. Considere un juego repetido entre un agente y un principal. En cada periodo t, el agente escoge esfuerzo $e_t \in \{0, 1\}$ que no es observable por el principal. El esfuerzo determina un producto $y_t \in \{0, 1\}$ que es observable solo por el principal. Es decir, en este modelo, las evaluaciones y_t son subjetivas y no son observables por el agente. La probabilidad con la que $y_t = 1$ es pe_t, con $0 < p < 1$. El principal escoge una transferencia $b_t \geq 0$ para dar al agente, y una cantidad $\tau_t \geq 0$ para botar a la basura. Los pagos en el periodo t son $b_t - ce_t$ para el agente, y $y_t - b_t - \tau_t$ para el principal. Asuma que $p > c$ de modo que $e_t = 1$ es eficiente y que los juagdores tienen un factor de descuento igual a $\delta < 1$.

(a) Restrinja atención a contratos estacionarios en los cuales, en el camino del equilibrio, el agente escoge $e_t = 1$ y los pagos son funcione $b(y_t)$, $\tau(y_t)$ de la evaluación subjetiva y_t. Muestre que si $\delta < \frac{c}{p^2}$, entonces no existe un contrato como el descrito que sea de equilibrio.

(b) Considere ahora el siguiente contrato. El agente escoge $e = 1$ en cada periodo, el agente paga $b = c/p$ si $y = 1$ y bota $\tau = c/p$ si $y = 0$. Muestre que si $\delta \geq c/p^2$, el contrato implícito es de equilibrio.

(c) Por qué en la relación se botan recursos (money burning) τ_t con probabilidad positiva en el camino del equilibrio?

3 Transmisión de Información

P7. Consideramos el modelo de Cheap talk de Crawford-Sobel (1982) discutido en clases. Un agente tiene información privada $\theta \in [0,1]$ que, desde la perspectiva del principal, se distribuye uniforme en $[0,1]$. El principal toma una decisión $a \in \mathbb{R}$ que genera pagos $U^A(a,\theta) = -(a-\theta-c)^2$ y $U^P(a,\theta) = -(a-\theta)^2$, con $c > 0$. El juego es como sigue. El agente aprende su tipo privado y le envia un mensaje $m \in \mathbb{R}$ al principal quien escoge una acción $a \in \mathbb{R}$ una vez que conoce el mensaje. Llamaremos *autoridad* a esta manera de organizar la relación agente-principal.

(a) Encuentre el número máximo de mensajes significativos que pueden usarse en equilibrio cuando $c = \frac{1}{8}$. Muestre que si $c = 1$, entonces el único equilibrio es de balbuceo. En cada caso, calcule los pagos de equilibrio (ex-ante).

(b) Considere una manera alternativa de organizar la relación agente-principal que llameremos *delegación*. Bajo delegación, el principal delega la decisión al agente, quien luego de conocer su tipo θ toma la acción $a \in \mathbb{R}$. Calcule el pago esperado del principal bajo delegación. Explique el tradeoff que enfrenta el principal al momento de decidir autoridad vs delegación

(c) Compare autoridad con delegación cuando $c = 1/8$ y cuando $c = 1$. Explique.

P8. Un principal debe tomar una decisión de inversión $a \in \mathbb{R}$, pero no conoce el estado del mundo $s \in \{0,1\}$. Un agente no conoce s, pero en cada $t = 0,1,2,\dots$, el estado del mundo s se le revela con probabilidad $\lambda \in]0,1[$. En $t = 0$, tanto el agente como el principal creen que el estado del mundo es $s = 1$ con probabilidad p y $s = 0$ con probabilidad $(1-p)$.

El juego de comunicación es como sigue: En cada $t \geq 0$

t1 El principal toma una decisión $a \in \mathbb{R}$ o espera. Si toma la decisión el juego se acaba. Si espera

t2 Le es revelado el estado del mundo al agente con probablidad λ, mientras que con probabilidad $(1-\lambda)$ el agente no recibe información. El agente envia un mensaje $m^t \in \{0,1,U\}$ y se procede a la ronda $t+1$

De este modo, incialmente ambas partes están igualmente desinformadas pero en algún momento el agente estará informado pero el principal no lo sabrá. Si la decisión a se toma en la ronda T, entonces los pagos son

$$U^P(a,s,T) = \delta^T(1-(a-s)^2),\ U^A(a,s,T) = \beta^T(1-(a-s)^2).$$

Suponemos que $\beta < \delta$ de modo que al agente es más impaciente que el principal. De este modo, ambas partes valoran la espera por información para tomar una mejor decisión, pero el principal la valora más (por ejemplo, el agente puede encontrar un trabajo mejor y dejar la firma en el siguiente periodo).

(a) Muestre que si el principal toma una decisión dada su creencia μ sobre el estado S, entonces $a(\mu) = \mu$. Deduzca que el pago esperado de tomar una decisión con creencia μ es $v(\mu) = 1 - \mu(1 - \mu)$.

(b) Suponga que el agente envia mensajes verdaderos en cada ronda t. Plantee el problema de programación dinámica del principal y deduzca que en cada t el principal toma una decisión ssi $v(\mu) \geq \frac{\delta\lambda}{1-\delta(1-\lambda)}$.

En el resto del problema suponemos que el principal prefiere esperar.

(c) Muestre que existe un equilibrio en que el agente envia mensajes verdaderos ssi $\max\{1 - p, p\} \leq \frac{\beta\lambda}{1-\beta(1-\lambda)}$. Explique porque incluso cuando hay divergencia de preferencias un equilibrio de mensajes verdaderos existe.

(d) Muestre que existe un equilibrio con transmisión de información independiente de la divergencia en las preferencias (es decir, incluso cuando $\beta = 0$). Deduzca que en este modelo autoridad es mejor que delegación. Explique