INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Solución Propuesta Tarea 1
Macroeconomía II - IN759
Segundo Semestre 2010
Profesor: Benjamín Villena R.

Problema 1: Modelo de Solow

Considere una economía de Solow donde no hay progreso tecnológico exógeno ni crecimiento de la población. La función de producción utiliza capital y trabajo y satisface retornos constantes a escala y las condiciones de Inada. La tasa de depreciación δ y de ahorro s son constantes y exógenas. Los hogares poseen una unidad de tiempo y no valoran el ocio.

1. Suponga que el mercado laboral *no es perfectamente competitivo*. Debido a la ley laboral, los trabajadores en lugar de recibir un salario competitivo obtienen una fracción $\phi \in (0, 1)$ del producto de su empleador como ingreso laboral. Caracterize el equilibrio competitivo de esta economía suponiendo que en el momento $t = 0$ existe un stock de capital $K_0 > 0$.

   R: La evolución del stock de capital es la misma que en el modelo tradicional con una tasa de ahorro exógena y población constante

   $$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + sy_t$$

   Esto implica que en el estado estacionario tendremos de todos modos que $\delta k^* = sf(k^*)$.

   Sabemos que la remuneración al factor trabajo es $wL = \phi Y$, por lo tanto las firmas contratan capital teniendo en cuenta esta restricción.

   $$\max_{K,L} \{F(K, L) - \phi F(K, L) - RK\}$$

   La primera CPO del problema nos dice que $(1-\phi)F_K(K, L) = (1-\phi)f'(k) = R$. La CPO del trabajo indica que si el pago al trabajo es una cantidad fija de producto, lo ideal sería es llevar F_L tan bajo como sea posible, es decir, contratar todo el trabajo disponible.

Por otro lado, sabemos que los hogares son dueños de los factores productivos por lo que si el trabajo se lleva una fracción ϕ del producto, el resto remunera al capital. Por tanto $(1-\phi)Y = RK$, lo que implica que

$$y/k = f(k)/k = R/(1-\phi)$$

Debido a estas dos relaciones concluimos que

$$f(k)/k = f'(k) = \delta/s \quad \rightarrow \quad k^*_{nc} = f'^{-1}(\delta/s)$$

Finalmente, este resultado nos lleva a concluir que la productividad marginal del capital $f'(k)$ es igual a $R^* = f'(f'^{-1}(\delta/s)) = \delta/s$.

Entonces, podemos concluir que en esta economía el equilibrio es un conjunto de secuencias de cantidades de capital, producto, consumo e inversión $\{K_t, Y_t, C_t, I_t\}_{t=0}^{\infty}$ y de remuneraciones al trabajo $\{W_t\}_{t=0}^{\infty}$ y precios de renta del capital $\{R_t\}_{t=0}^{\infty}$ tal que, dado un stock inicial de capital positivo K_0 cumple las siguientes propiedades

- Los hogares ahorran una fracción constante del producto s, es decir $sY_t = I_t$ y $(1-s)Y_t = C_t$ para todo t.
- Los hogares acumulan capital según la ecuación $K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t$
- Las empresas pagan al factor trabajo de los hogares una fracción constante del producto, es decir $W_t = \phi Y_t$.
- Las empresas optimizan la contratación de capital dadas la restricción de pago al factor trabajo y los precios del capital R_t.
- El mercado de capitales se limpia: todo el capital es contratado a los precios R_t.
- En el mercado laboral las empresas contratan el trabajo óptimo dada lsa restricción de pagar una fracción ϕ del producto a este factor.

2. Suponga que la función de producción es Cobb-Douglas y compare su resultado con el de una economía con un mercado laboral perfectamente competitivo. ¿ Bajo qué condiciones el nivel de producto per cápita será mayor en la economía con mercado laboral competitivo? ¿ Sería posible que la existencia de un mercado laboral no competitivo aumentara el bienestar de los hogares en algún sentido? Sea preciso en su respuesta.

   R: En una economía competitiva con función de producción Cobb-Douglas, en estado estacionario se cumple que

$$f(k)/k = Ak^{\alpha-1} = \delta/s \quad \rightarrow \quad k^*_c = (As/\delta)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

En la economía de mercado laboral no competitivo concluíamos que

$$f'(k) = \delta/s \quad \rightarrow \quad k^*_{nc} = (\alpha A s/\delta)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Es claro entonces que la razón de capital en estado estacionario de ambas economías es

$$k^*_{nc}/k^*_c = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} < 1 \text{ si } \alpha < 1$$

Lo cual significa que la economía no competitiva tendrá un producto per cápita menor en estado estacionario. En efecto,

$$y_{nc}/y_c = \frac{A\left(k^*_{nc}\right)^{\alpha}}{A\left(k^*_c\right)^{\alpha}} = \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} < 1$$

Dado que la transición al estado estacionario es monótona en el modelo de Solow, si las economías parten del mismo stock de capital $k_0 > 0$, la economía competitiva siempre produce más y acumula más capital.

La última pregunta implica una definición de bienestar para una economía donde los consumidores no tienen función de utilidad. Habitualmente se ha empleado la noción de que el bienestar se maximiza en estado estacionario si la tasa de ahorro genera un consumo estacionario máximo, dados los demás parámetros del modelo. En particular, vemos que la economía distorsionada acumula menos capital. Por ello, es posible que la distorsión (mercado laboral no competitivo) puede elevar el consumo per capita estacionario. Formalmente, la razón de consumos en estado estacionario es

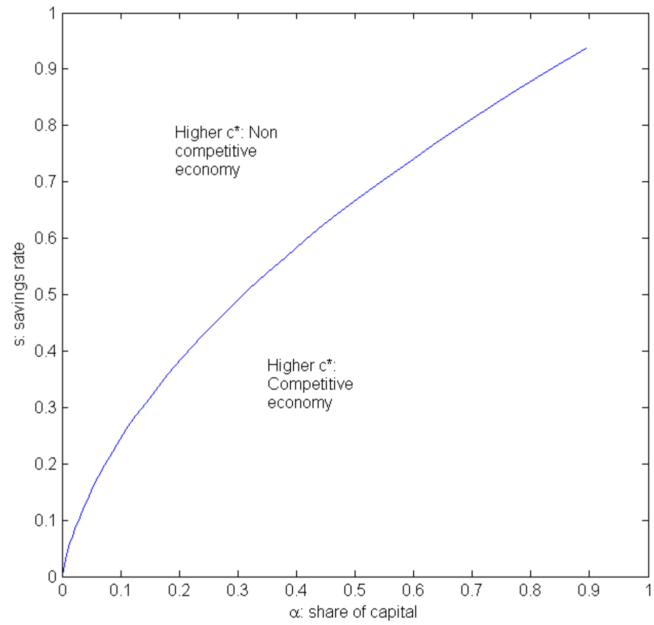
$$\begin{aligned}\frac{c^*_{nc}}{c^*_c} = \frac{y_{nc} - \delta k_{nc}}{y_c - \delta k_c} &= \frac{A\left(A\alpha s/\delta\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta\left(A\alpha s/\delta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{A\left(A s/\delta\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta\left(A s/\delta\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \\ &= \frac{(\alpha s)^{\frac{1}{1-\alpha}} - (\alpha s)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{s^{\frac{1}{1-\alpha}} - s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\end{aligned}$$

Haciendo un poco de álgebra concluimos que la economía no competitiva genera un consumo per cápita en estado estacionario mayor que la competitiva si

$$s > \frac{1-\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1-\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

La Figura 2 ilustra las regiones en las cuales es mayor el bienestar en una u otra economía. En general, si la tasa de ahorro es muy alta, la economía no competitiva obtiene mayor consumo per capita estacionario. Si α es alto entonces el rango de tasas de ahorro consistentes con un mayor consumo per capita en la economía no competitiva es menor.

Figure 1: Regiones donde consumo per cápita es máximo en economías no competitiva y competitiva



3. Considere ahora la economía con un mercado laboral potencialmente competitivo donde existe un gobierno que aplica un impuesto al trabajo $\tau \in (0,1)$. La recaudación tributaria es redistribuida a los hogares como transferencia de suma alzada. Explique los efectos del impuesto en los casos en que (i) el ahorro se realiza antes de recibir la transferencia fiscal y (ii) el ahorro se realiza después de recibir la transferencia.

   R: En el primer caso señalado, el hogar ahorra la fracción s del ingreso que tiene disponible sin haber recibido la transferencia del gobierno. Por lo tanto, su ingreso antes de impuestos es

$$y_t^a = w_t(1-\tau) + R_t k_t$$

   Por tanto su inversión en capital es una fracción s del ingreso antes de impuesto

$$i_t = s y_t^a$$

   El mercado de factores sigue siendo competitivo y por lo tanto, los precios de los factores igualan su productividad marginal

$$w_t = F_L(K_t, L_t) = f(k_t) - k_t f'(k_t) \quad R_t = F_K(K, L) = f'(k_t)$$

Notar que el impuesto sobre el salario no afecta la firma, ya que la oferta de trabajo es inelástica, vale decir, los hogares proveen su unidad de tiempo al mercado sin importar el salario.

Ocupando la ley de acumulación del capital obtendremos que

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= sy_t^a + (1-\delta)k_t = s(w_t(1-\tau) + R_t k_t) + (1-\delta)k_t \\ \frac{k_{t+1}}{k_t} &= s(1-\tau)\frac{f(k_t)}{k_t} + s\tau f'(k_t) + 1 - \delta \end{aligned}$$

Derivando k_{t+1}/k_t con respecto a k_t es simple demostrar que la tasa de crecimiento del capital decrece con k_t. Por lo tanto, existe un estado estacionario tal que

$$(1-\tau)\frac{f(k^*)}{k^*} + \tau f'(k^*) = \delta/s$$

Esta última expresión puede reescribirse como

$$(1-\tau)\frac{f(k^*)}{k^*} + \tau\alpha(k^*)k^* = \delta/s$$

donde $\alpha(k^*) = \frac{f'(k^*)k^*}{f(k^*)}$, que es la participación del capital en el producto. Este número está claramente restringido entre 0 y 1. Entonces,

$$(1-\tau(1-\alpha(k^*)))\frac{f(k^*)}{k^*} = \delta/s$$

El término $1-\tau(1-\alpha(k^*))$ claramente está entre 0 y 1. Ya que $f(k)/k$ es una función decreciente en k, el stock de capital acumulado en estado estacionario es decreciente en la tasa de impuesto τ. Por lo tanto, esta economía con $\tau > 0$ acumula menos capital y tiene menor producto en estado estacionario. El consumo, en tanto considera el monto de transferencias del gobierno. El pago de impuestos equivale a transferencia post impuestos, por lo que el consumo alcanza

$$\begin{aligned} c^* &= f(k^*) - i(k^*) = f(k^*) - s(w^*(1-\tau) + R^*k^*) \\ &= f(k^*) - s(1-\tau)(f(k^*) - k^*f'(k^*)) - sf(k^*)k^*) \\ &= (1-s(1-\tau))f(k^*) - s\tau f'(k^*)k^* \end{aligned}$$

La segunda situación que se pide analizar ocurre cuando la acción de ahorrar del hogar se realiza después de que el gobierno ha hecho una transferencia $T = \tau w$ a cada hogar. En ese caso tendremos que el ingreso diponible para ahorrar será $y_t^a = w_t(1-\tau) + R_t k_t + T_t = w_t + R_t k_t = y_t$. La disponibilidad de la transferencia antes del ahorro restituye el producto total, por lo cual, el resultado obtenido es equivalente al del modelo de Solow tradicional.

4. ¿ Sería posible que el impuesto laboral aumentara el bienestar de los hogares en algún sentido?

   R: Al igual que en la pregunta de mercado laboral no competitivo, debemos definir de algún modo qué significa "bienestar" en un modelo donde los hogares no tiene preferencias bien definidas. Habitualmente asumimos la convención de buscar valores de parámetros que maximicen el valor del consumo en estado estacionario. Como en Solow el valor de la tasa de ahorro no es determinado óptimamente por los hogares, es posible que para un valor de s muy alto la tasa de impuesto reduzca el stock de capital en estado estacionario y eleve el consumo de estado estacionario.

   A modo de ejemplo, suponiendo una función de producción Cobb-Douglas, podemos calcular el ratio del consumo de la economia con impuesto c_τ^* con respecto a la que no tiene impuesto c^*.

$$\frac{c_\tau^*}{c^*} = \frac{(1-s(1-\tau))f(k_\tau^*) - s\tau f'(k_\tau^*)k_\tau^*}{(1-s)f(k^*)}$$

   Utilizando las ecuaciones anteriores concluimos que

$$k_\tau^* = \left(\frac{As(1-\tau(1-\alpha))}{\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

   Por lo tanto obtendremos que

$$\frac{c_\tau^*}{c^*} = \frac{(1-s(1-\tau))f(k_\tau^*) - s\tau\alpha f(k_\tau^*)}{(1-s)f(k^*)} = \frac{f(k_\tau^*)}{f(k^*)}\frac{1-s(1-(1-\alpha)\tau)}{1-s}$$

   Juntando todas las piezas se obtiene una condición muy similar a la del problema con mercado laboral no competitivo. El mercado con impuestos resulta en consumo estacionario más alto si

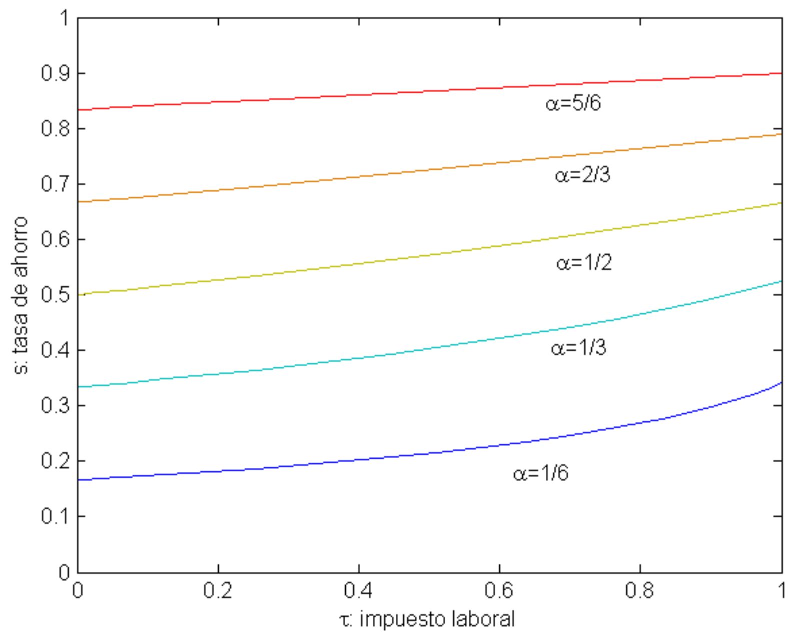
$$s > \frac{1-(1-\tau(1-\alpha))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1-(1-\tau(1-\alpha))^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

   En la Figura 2 vemos trazados los límites entre las regiones en las que el impuesto laboral genera mayor consumo per cápita para distintos valores de α, la participación del capital en el producto. Vemos que en la medida que la tasa de impuesto aumenta y que α aumenta, se amplía más el rango de tasas de ahorro que generan mayor c^* sin impuesto laboral.

Problema 2: Teorema de Uzawa

Para este problema puede resultar útil ver la demostración del Teorema en Jones and Scrimgeour (2008) o en el capítulo 2 de Acemoglu (2009) para el caso de tiempo continuo. La idea es probar el Teorema aquí en tiempo discreto siguiendo una lógica parecida.

Figure 2: Regiones donde consumo per cápita es mayor según tasa de impuesto laboral



El tiempo es, por supuesto, **discreto**. La economía posee una tecnología de producción que usa capital K y trabajo L con retornos constantes a escala y condiciones de Inada que puede depender del tiempo (por ejemplo, a través de cambio tecnológico exógeno de algún tipo). El producto Y se utiliza completamente en consumo o inversión física. El capital se acumula de acuerdo a la ley acumulación del capital con tasa de depreciación constante $\delta \in (0,1)$, es decir $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$. El factor trabajo crece a una tasa exógena constante de $g_L \geq 0$.

Una **senda de crecimiento balanceado** (SCB) es una secuencia de variables $\{Y_t, K_t, L_t, C_t, I_t\}_{t=0}^{\infty}$ en la cual todas las variables crecen a una tasa neta constante g_X con $X = Y, K, L, C, I$ para todo $t > \tau > 0$.

Podemos formular el teorema de Uzawa en los siguientes términos: Si en la economía descrita el producto per cápita $y = Y/L$ tiene una tasa de crecimiento constante g desde el período $\tau > 0$ en adelante, existe una senda de crecimiento balanceado, y la inversión física I_t es estrictamente positiva para todo $t \geq \tau$, entonces la función de producción puede representarse como $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$ con $A_{t+1}/A_t = 1 + g$ para todo $t \geq \tau$. Es decir, el cambio tecnológico es Harrod-neutral.

Para probar el teorema seguiremos los siguientes pasos:

1. Muestre que el crecimiento del stock de capital debe ser igual al crecimiento de la inversión.

   R: Conjeturando una senda de crecimiento balanceado para todo $t > \tau$, podemos escribir la ecuación de acumulación de capital como

   $$\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1 - \delta + \frac{I_t}{K_t} g_K + \delta = \frac{I_t}{K_t} \quad \forall t > \tau$$

   Con ello la razón inversión capital debe ser constante, lo que implica $g_I = g_K$ para $t > \tau$.

2. Utilizando SCB y la función de producción $Y_t = F(K_t, L_t, t)$ muestre que si $g_Y = g_K$ entonces el teorema se prueba con $A_t = \left(\frac{1+g_Y}{1+g_L}\right)^{t-\tau}$.

   R: Utilizando una senda de crecimiento balanceado sabemos que para cualquier variable X_t tendremos que $X_t = (1 + g_X)^(t - \tau)X_\tau$. Por lo tanto, la función de producción en $t > \tau$ puede escribirse como

   $$\begin{aligned} Y_t &= F(K_t, L_t) \\ Y_\tau(1 + g_Y)^{-(t-\tau)} &= F(K_\tau(1 + g_K)^{-(t-\tau)}, L_\tau(1 + g_L)^{-(t-\tau)}) \end{aligned}$$

   Utilizando retornos constantes a escala, esto implica que

   $$Y_\tau = F\left(K_\tau \left(\frac{1 + g_K}{1 + g_Y}\right)^{-(t-\tau)}, L_\tau \left(\frac{1 + g_L}{1 + g_Y}\right)^{-(t-\tau)}\right)$$

   Si $g_Y = g_K$ el cambio técnico sería aumentador de trabajo ya que podríamos escribir la función de producción para $t > \tau$ del siguiente modo

   $$Y_\tau = F\left(K_\tau, L_\tau A_{t-\tau}\right)$$

   con $A_{t-\tau} = \left(\frac{1+g_Y}{1+g_L}\right)^{t-\tau}$.

3. Utilizando la identidad contable $Y_t = C_t + I_t$ y la definición de SCB, muestre que

   $$C_t(1 + g_C)(g_Y - g_C) = I_t(1 + g_I)(g_I - g_Y) \quad \forall t \geq \tau$$

   R: Para derivar este resultado se llega primero al siguiente resultado para $t > \tau$

   $$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t \\ \frac{Y_{t+1}}{Y_t} &= \frac{C_{t+1}}{C_t}\frac{C_t}{Y_t} + \frac{I_{t+1}}{I_t}\frac{I_t}{Y_t} \\ 1 + g_Y &= (1 + g_C)\frac{C_t}{Y_t} + (1 + g_I)\frac{I_t}{Y_t} \end{aligned}$$

Ya que este resultado se cumple para todo $t > \tau$ con senda de crecimiento balanceado, tenemos que

$$\begin{aligned}(1+g_C)\frac{C_{t+1}}{Y_{t+1}} + (1+g_I)\frac{I_{t+1}}{Y_{t+1}} &= (1+g_C)\frac{C_t}{Y_t} + (1+g_I)\frac{I_t}{Y_t}\\ (1+g_C)\left(\frac{C_{t+1}}{Y_{t+1}} - \frac{C_t}{Y_t}\right) &= (1+g_I)\left(\frac{I_t}{Y_t} - \frac{I_{t+1}}{Y_{t+1}}\right)\\ (1+g_C)\left(\frac{1+g_C}{1+g_Y} - 1\right)\frac{C_t}{Y_t} &= (1+g_I)\left(1 - \frac{1+g_I}{1+g_Y}\right)\frac{I_t}{Y_t}\end{aligned}$$

Simplificando la última expresión se obtiene la identidad buscada

$$(1+g_C)\,(g_Y - g_C)\,C_t = (1+g_I)\,(g_I - g_Y)\,I_t$$

4. Con el último resultado concluya que $g_Y = g_K$ salvo si la inversión es cero, lo que prueba el teorema.

   R: Utilizando el resultado previo de que $g_I = g_K$ tendremos que la última expresión es igual a

$$(1+g_C)\,(g_Y - g_C)\,C_t = (1+g_K)\,(g_K - g_Y)\,I_t$$

   Si $g_Y = g_C$ y $I_t > 0$, entonces $g_Y = g_K$ necesariamente, y llegamos a la conclusión deseada. Si suponemos que $g_Y \neq g_C$ y $I_t > 0$, entonces C_t es siempre proporcional a I_t (o dicho de otro modo, C_t/I_t es constante) por lo cual $g_C = g_K$. Esto implicaría que

$$\begin{aligned}(1+g_C)\,(g_Y - g_C)\,C_t &= (1+g_C)\,(g_C - g_Y)\,I_t\\ C_t + I_t &= 0\end{aligned}$$

   lo cual contradice el supuesto inicial de que $I_t > 0$. Por lo tanto $g_Y = g_C$, y así $g_Y = g_K$. Finalmente si $C_t = 0$ e $I_t > 0$, esto sólo puede ser consistente con $g_K = g_Y$ también.

5. Explique la intuición económica del resultado obtenido.

   R: El modelo neoclásico o de Solow presenta una asimetría fundamental entre los factores productivos. El capital es acumulable endógenamente, en tanto que el trabajo no lo es. El único modo de sostener un balance a la ecuación $Y = F(K, L) \rightarrow 1 = F(K/Y, L/Y)$ para que exista un crecimiento sostenido es si existe un cambio técnico aumentador de trabajo que permita que capital, unidades efectivas de trabajo y producto crezcan a igual tasa.

Problema 3: Modelo neoclásico

Suponga que existe una economía con características neoclásicas analizada en clases. Suponga que las preferencias de los hogares vienen dadas por $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ con $\sigma \geq 0$. La función de producción emplea capital y trabajo y tiene retornos constantes a escala. La población no crece. Caracterice el equilibrio competitivo de la economía (estado estacionario y dinámica de transición) en las siguientes circunstancias especiales y explique **económicamente** sus resultados.

1. Las preferencias por consumo son lineales, es decir $\sigma = 0$.

   R: En términos generales, tenemos la siguiente ecuación de Euler que caracteriza (junto con la condición de transversalidad) el comportamiento óptimo de los hogares de acumulación de activos

   $$c_{t+1}/c_t = (\beta(f'(k_{t+1}) + 1 - \delta))^{1/\sigma}$$

   En estado estacionario, $c_{t+1} = c_t = c^*$, lo cual implica que $\beta(f'(k^*) + 1 - \delta) = 1$, vale decir $k^* = f'^{-1}(1/\beta - 1 + \delta)$. Sólo basta conocer β, δ y $f(\cdot)$ para determinar el stock de capital estacionario. Las preferencias no influyen, incluso si $\sigma = 0$. Por lo tanto, la economía se mueve a este estado estacionario si $t \to \infty$. Claramente, la ecuación de Euler evaluada en $\sigma = 0$ está indefinida. Sin embargo, podemos analizar el límite por la izquierda del en la medida que $\sigma \to 0$. Claramente si $\beta(f'(k_t) + 1 - \delta) > 1$ (el stock de capital está por debajo de k^*. La tasa de crecimiento del consumo tiende a infinito. La economía se ajusta hacia el estado estacionario ahorrando todos sus recursos para instalar capital hasta k^*. Al revés, si $\beta(f'(k_t) + 1 - \delta) < 1$, la economía desacumula capital hasta llegar al estado estacionario en un período.

2. El stock de capital inicial es mayor que el de estado estacionario, pero hay irreversibilidad de la inversión, es decir $I_t \geq 0 \quad \forall t$. **R:** Si existe irreversibilidad en el estado estacionario y el capital es mayor al del estado estacionario y no es posible desinstalar capital, la restricción de $I_t \geq 0$ podría estar activa si la tasa de depreciación no es muy alta.

   $$\begin{aligned} V(k) &= \max_{k'} \{u(f(k) + (1-\delta)k - k') + \beta V(k')\} \\ &\text{sujeto a } k' - (1-\delta)k \geq 0 \end{aligned}$$

   Dada la existencia de $V(k)$, el problema se vuelve un problema de optimización de Kuhn-Tucker, sujeto a esta restricción de desigualdad. El Lagrangiano asociado sería

   $$\mathcal{L} = u(f(k) + (1-\delta)k - k') + \beta V(k') + \lambda(k' - (1-\delta)k)$$

La condición de primer orden y de holgura complementaria

$$-u_c(c) + \beta V_k(k') + \lambda = 0$$
$$\lambda(k' - (1-\delta)k) = 0$$

Utilizando Teorema de la Envolvente, sabemos que $V_k(k) = u_c(c)(f_k(k) + 1 - \delta) - \lambda(1-\delta)$. Por tanto, la ecuación de Euler modificada sería

$$c^{-\sigma} + \lambda = \beta(c')^{-\sigma}(f_k(k') + 1 - \delta) - \beta\lambda'(1-\delta)$$

Esto implica que la ecuación de Euler se vuelve una desigualdad estricta si $I = 0$. En dicho caso

$$c^{-\sigma} < \beta(c')^{-\sigma}(f_k(k') + 1 - \delta) \rightarrow c'/c < (\beta(f_k(k') + 1 - \delta))^{1/\sigma}$$

La tasa de de crecimiento del consumo es estrictamente menor a la que habría sin irreversibilidad. Esto es muy lógico: los hogares desean desinstalar capital y consumirlo, pero no es posible. El stock de capital evoluciona de acuerdo a $k' = (1-\delta)k$ y el consumo y producto son iguales en este caso con restricción activa, es decir $c = f(k)$.

3. Las preferencia tienen formación de hábitos de consumo, es decir, la función de utilidad instantánea es $u(c_t, c_{t-1}) = \frac{(c_t - \theta c_{t-1})^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ con $\theta \in (0,1)$. Pista: redefina las variables estado del modelo.

   R: Este tipo de preferencias se les conoce a veces como de hábitos de consumo e intenta capturar el hecho de que cambios abruptos de las condiciones iniciales del consumo son importantes para determinar la conducta de ahorro y consumo de los hogares. Aparece una nueva variable estado, que es c_{t-1}. En la formulación recursiva del problema llamaremos $c_{t-1} = c$ y $c_t = c'$ para seguir con notaciones similares de variables control y estado.

$$V(k,c) = \max_{k',c'} \left\{ \frac{(c' - \theta c)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta V(k', c') \right\}$$
$$\text{sujeto a } f(k) \geq c' + k' - (1-\delta)k$$

   Las condiciones de primer orden del problema son

$$(c' - \theta c)^{-\sigma} + \beta V_c(k', c') - \lambda = 0$$
$$\beta V_k(k', c') - \lambda = 0$$

Las condiciones de Envolvente son:

$$V_c(k,c) = -\theta(c' - \theta c)^{-\sigma} V_k(k,c) = \lambda(f_k(k) + 1 - \delta)$$

Por lo tanto, el plan óptimo de consumo viene determinado por las siguientes ecuaciones:

$$(c' - \theta c)^{-\sigma} - \theta(c'' - \theta c')^{-\sigma} = \lambda$$

Y además

$$\lambda = \beta\lambda'(f_k(k') + 1 - \delta)$$

En estado estacionario, tendremos que $c = c' = c'' = c^*$. Por ello $\lambda^* = (c^*)^{-\sigma}(1 - \theta)^{1-\sigma}$. Entonces, el stock de capital en estado estacionario es igual al obtenido con preferencias CRRA.

$$1/\beta = (f_k(k^*) + 1 - \delta)$$

El nivel de inversión necesariamente debe ser el consistent con mantener el stock de capital constante, es decir $i^* = \delta k^*$. Necesariamente, el consumo será el mismo que bajo preferencias CRRA $c^* =^f (k^*) - \delta k^*$. Las preferencias con hábitos de consumo sólo cambian la transición, haciendo que la utilidad marginal de la riqueza λ sea más baja debido a que aumentar el consumo fuertemente genera pérdidas de bienestar a futuro.

References

Acemoglu, D. (2009). *Introduction to Modern Economic Growth.* Princeton University Press.

Jones, C. I. and D. Scrimgeour (2008). A New Proof of Uzawa's Steady-State Growth Theorem. *Review of Economics and Statistics 90*(1), 180–182.