DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesor: Fernando Ordóñez P.
Semestre: Otoño 2010
Fecha: 30 de Abril de 2010

IN47B Ingeniería de Operaciones
Control N$^{\underline{o}}$1

Problema 1 (50 %)

1. (0.5 pts) Explique si es posible o no hacer una simulación de Monte Carlo que represente el sistema de una cola de un banco.
   Sol: En general no. Una simulacion de monte carlo son tiradas independientes de una misma variable aleatoria. En una cola de un banco el sistema cambia dependiendo de las variables de estado. De hecho, si no hay nadie en el banco, lo unico que puede ocurrir es que llegue un cliente, mientras que si hay almenos un cliente siendo atendido pueden ocurrir al menos 2 cosas: llegada de un cliente y la conclusion de un servico. Esto es la simulacion de un sistema dinámico, una simulacion de monte carlo es estatica.
2. (0.5 pts) Sea $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, donde $x_1, \ldots, x_n$, son un sampleo i.i.d. de una variable aleatoria X. Muestre que $\bar{x}$ es un estimador insesgado de la esperanza de X.
   Sol: Hay que demostrar que $\mathrm{E}(\bar{x}) = \mathrm{E}(X)$. Se tiene que $\mathrm{E}(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(x_i)$ y como cada una es sampleada de forma i.i.d de X, tenemos que $\mathrm{E}(x_i) = \mathrm{E}(X)$.
3. (0.5 pts) Si $x_1, \ldots, x_n$ son el resultado de n corridas independientes de un simulador, y se conoce ademas n resultados de una variable aleatoria Z que tiene $\mathrm{E}(Z) = 4$, $\mathrm{Var}(Z) = 6$ y $\mathrm{Cov}(X,Z) = -0{,}5$. Encuentre el mejor intervalo de confianza posible en torno a $\mathrm{E}(X)$.
   Sol: Se construye el intervalo de confianza que sale de considerar la variable $X_c = X + c(Z-4)$, con $c = -\mathrm{Cov}(X,Z)/\mathrm{Var}(Z) = 0{,}5/6 = 1/12$. Entonces obtenemos $xc_i = x_i + 1/12(z_i - 4)$ y dejamos $\overline{xc} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} xc_i$, donde

   $$\mathrm{Var}(X_c) = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Cov}(X,Z)^2/\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X) - 0{,}25/6 = \mathrm{Var}(X) - 1/24$$

   El mejor intervalo es

   $$\left[\overline{xc} - \kappa_\alpha\sqrt{\mathrm{Var}(X_c)/n}, \overline{xc} + \kappa_\alpha\sqrt{\mathrm{Var}(X_c)/n}\right]$$

4. Considere el algoritmo Euclidiano para encontrar el maximo común divisor entre dos números:

Algorithm 1 ALGORITMO EUCLIDIANO

```
Input a y b
if a = 0 then return b
while b ≠ 0 do
    if a > b then
        a := a − b
    else
        b := b − a
    end if
end while
return a
```

a) (0.25 pts) ¿Como se mide el tamaño de una instancia para el problema de encontrar el maximo común divisor? (note que el tamaño de un problema esta relacionado con el trabajo necesario para resolverlo)
Sol: Como el problema esta definido por solo dos numeros enteros positivos, el tamaño del problema no es solo la cantidad de numeros (ya que esta es constante y no influye en que algunos problemas sean mas dificiles de resolver que otros). La ejecucion de este problema depende de los numeros seleccionados, de hecho el tamaño tiene que estar relacionado con $\max\{a,b\}$, o puede tambien ser el numero de bits necesarios para almacenar a y b que es equivalente.

b) (0.25 pts) Suponiendo que sumas, restas, asignaciones y comparaciones son 1 operación, ¿Cuantas operaciones se demora el algoritmo Euclidiano en el peor caso? ¿Y en el mejor caso?. Resuma el numero de operaciones en el término que crece mas rápidamente cuando el tamaño del problema aumenta.
Sol: El peor caso se obtiene cuando la iteracion **while** se repite mas veces. Esto se logra por ejemplo cuando los numeros no han cambiado mucho en cada iteracion. como lo minimo que pueden cambiar es restar 1 al valor de a o b, el ciclo while se repite a lo mas b veces. Esto ocurre cuando la entrada es $(a,b) = (1,b)$. El numero de operaciones es: $4 * b + 2$. Esto es una constante por b.
El mejor caso son 6 operaciones, eg: para $(a,b) = (a,a)$ tenemos 4 comparaciones, 1 asignacion, y un return. O sea es una constante, independiente del tamaño.

5. (0.5 pts) ¿Que ocurre con las reglas EMSR_a y EMSR_b cuando el supuesto que los clientes mas baratos compran primero no es valido?
Sol: Segun el paper visto en la ultima lectura, existen experimentos empiricos con datos reales de demanda de lineas aereas que muestran que tanto EMSR_a y EMSR_b no se desvian mucho de la solucion optima cuando los clientes no aparecen de forma sequencial por tipo. Es mas, ambas heuristicas resultan en una muy buena utilizacion de la capacidad del avion.
Tambien se sabe que se pueden construir ejemplos que hacen que EMSR_a sea muy mala, mientras que EMSR_b en general se mantiene cerca del optimo.

6. (0.5 pts) ¿Para que sirven los cupones en Revenue Management? De dos ejemplos más de prácticas en RM que logran el mismo objetivo.

Sol: Para diferenciar clientes. Una persona que junta cupones es mas sensible al precio ya que esta dispuesta a hacer el trabajo extra para obtener el descuento.
El mismo objetivo se logra haciendo descuentos por vuelos con la obligacion de pasar al menos 7 dias en destion o una noche de sabado. Otro ejemplo son los descuentos por cliente frequente, en los que uno tiene una tarjeta y va marcando los que compro, cuando llega a 10 le dan uno gratis.

Problema 2 (50 %)

Usted decide simular un sistema de venta de pasajes de avion para observar el impacto de distintas formas de asignar la capacidad a las distintas clases. En el caso de un vuelo en particular, los estudios de demanda estiman que llegan tres tipos de clientes: los dispuestos a pagar tarifa economica (tipo e), ejecutiva (tipo j) y primera clase (tipo p). Los tiempos entre llegadas para todos los clientes estan distribuidos como una exponencial adonde el tiempo promedio entre llegadas es diferente para los distintos tipos y si falta mas de un mes para el vuelo o no. Es decir, los pasajeros economicos aparecen con tiempos entre llegadas distribuidas de forma exponencial con un promedio μ_{e1} si falta mas de un mes para el vuelo y μ_{e2} si falta menos de un mes para el vuelo. Similarmente para los tipos j y p. Cuando aparece un cliente se usa EMSR$_b$ para decidir si se vende el pasaje o no. Se recalculan las probabilidades de llegada de clientes cada semana o si la capacidad del vuelo baja mas del 10 % desde el último calculo.

1. (0.5 pts) Si no dispone de un generador de variables aleatórias exponenciales, ¿Como puede generar las variables aleatóreas que representan los tiempos entre llegadas?
   Sol: Suponemos que tenemos un generador de variables uniformes en $[0,1]$ que podemos usar. Como la distribucion exponencial es $f(t) = \frac{1}{\mu}e^{-\frac{1}{\mu}t}$ y con cumulativa $F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\frac{1}{\mu}t}$. Generamos una variable con distribucion exponencial con el siguiente procedimiento: Samplear u uniforme en $[0,1]$, calcular $t = F^{-1}(u) = -\mu \ln(1-u)$.
2. (0.5 pts) ¿Cuales son las variables de estado y eventos de este sistema?
   Sol: Variables de estado: C, capacidad del avion, y t el tiempo. Los eventos que ocurren son: llega un cliente, llegamos a un mes de la fecha del vuelo, llegamos al dia de la semana en que se recalculan las probabilidades de llegada de clientes, la capacidad bajo 10 % desde el ultimo calculo de probabilidades y todavia no ha pasado una semana.
3. (0.7 pts) Indique como determina el tiempo que debe durar la simulación. Describa el procedimiento para avanzar el tiempo en la simulación.
   Sol: El periodo de simulacion puede ser todo el tiempo en que se mantiene abierta la venta de asientos en un vuelo (como 300 dias). Alternativamente esto se puede reducir a un tiempo T de la fecha del vuelo (digamos T = 100 dias) siempre y cuando podamos estimar el numero de clientes que serian aceptados en cada clase antes de T.
   Procedimiento para avanzar el tiempo: Se tiran 3 exponenciales (una por tipo). El minimo se compara con el siguiente tiempo fijo clave (un mes antes del vuelo, el fin de

la semana). Si es menor, ocurre una llegada del tipo correspondiente. Si alguno de los tiempos fijos clave es menor, etonces ese es el tiempo que se avanza.
Ojo que el tiempo no avanza hasta que la capacidad haya reducido un 10

4. (0.5 pts) Proponga políticas de control que podría evaluar usando este simulador. ¿Que estadisticos usaría para determinar la mejor política.
   Las politicas de control pueden ser: Cambiar el EMSR$_b$ por otro metodo para determinar si se acepta o no un cliente que llega, dejando EMSR$_b$ esto puede ser cambiar la frequencia con que se calculan las probabilidades de llegada de clientes (tanto en tiempo como en cambio de capacidad).
   El estadistico de interes en esta simulacion es el ingreso total que se obtiene por los clientes aceptados que se quiere maximizar. Tambien puede ser interesante mirar el numero de clientes de cada tipo que son rechazados, que por alguna politica de la empresa puede interesar acotar. i.e. queremos tener presencia en todos los tipos de pasajeros.
5. (0.8 pts) Suponga que al comienzo de la ultima semana, llega un cliente de tarifa ejecutiva y quedan 2 asientos disponibles aún. Si se tienen los siguientes parametros: precios $c_e = 1000$, $c_j = 2000$, $c_p = 3500$ y tiempos promedio entre llegadas $\mu_{e2} = 7$ días, $\mu_{j2} = 10$ días, $\mu_{p2} = 13$ días. ¿Se le vende o no se vende asiento al cliente ejecutivo?
   Sol: Como solo hay una clase mayor que ejecutivo, entonces EMSR$_b$ es la regla de Littlewood. Tenemos que la probabilidad que lleguen 2 o mas pasajeros de primera en una semana es $P(t_1 + t_2 <= 7dias) = 1 - e^{-\frac{7}{13}} - \frac{7}{13}e^{-\frac{7}{13}} = p$. Entonces aceptamos el pasajero ejecutivo si $2000 > 3500p$.
6. (BONUS 0.5 pts) En la tarea de simulación se debía realizar la carga/descarga de los camiones a una cierta tasa dada. Señale en qué afecta a los resultados si en el modelo la carga/descarga de cada camión se realiza en una única vez, estimando el tiempo que llevaría realizarlo y efectuándola al final de éste, en vez de realizar la carga/descarga de forma continua (o minuto a minuto, por ejemplo). ¿Cual de las dos opciones se ajusta más a la realidad? ¿Por qué?
   Sol: Es mas realista hacer la descarga/carga de forma continua, ya que si se demora 2 horas en descargar un camion es razonable pensar que tambien se va subiendo lo que ya se ha bajado. Los resultados de considerar que todo baja al final del tiempo necesario para bajar las cosas deberian ser menos eficientes, es decir mas lentos en llevar las cosas.