Simulación IV

Dpto. Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

IN47B, Ingeniería de Operaciones

Contenidos

Método

Para estimar μ tenemos un simulador que entrega variables aleatorias

- X tal que $\mathbb{E}(X) = \mu$
- Z con $\mathbb{E}(Z)$ conocido

$$\forall c \;\; X_c = X + c(Z - \mathbb{E}(Z)) \text{ tal que } \mathbb{E}(X_c) = \mu$$

Estimadores insesgados de μ

- $\overline{X}$
- $\overline{X_c} = \overline{X} + c(\overline{Z} - \mathbb{E}(Z))$ para todo c

Método

Donde tenemos que

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + c^2\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z) + 2c\mathrm{Cov}(X, Z)$$

El mejor valor de c es

$$c^* = -\frac{\mathrm{Cov}(X, Z)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z)}$$

con lo que se obtiene una minima varianza de

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_c) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) - \frac{\mathrm{Cov}(X, Z)^2}{\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z)}$$

Uso en simulación

Este método

- reduce varianza si $Cov(X, Z) \neq 0$
- valido en gral. dado
  - estimador insesgado X
  - Z el 'control variate' de X.

Si un simulador arroja X_i y Z_i con $\mathbb{E}(Z)$ conocido, tenemos el estimador insesgado

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i + c^*(Z_i - \mathbb{E}(Z))$$

¿que falta?

Uso en simulación

$$c^* = -\frac{\mathrm{Cov}(X, Z)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z)}$$

- hacer p corridas piloto y estimar
- $\mathrm{Cov}(X, Z) \sim \frac{1}{p-1} \sum_{j=1}^{p} (X_j - \overline{X}(p))(Z_j - \overline{Z}(p))$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z) \sim \frac{1}{p-1} \sum_{j=1}^{p} (Z_j - \overline{Z}(p))^2$

Ejemplo

Queremos estimar $\mathbb{E}(e^{(U+W)^2})$ con $U, W \sim U[0,1]$ independientes.

Posibles control variates

- $Z_1 = U + W$
- $Z_2 = (U + W)^2$

Note que $\mathbb{E}(Z_1) = 1$ y $E(Z_2) = 7/6$

Ejemplo

Matlab Code for Estimating $\theta = \mathrm{E}[e^{(U+W)^2}]$

```
> % Do pilot simulation first
> p=100; n=1000;
> u=rand(p,1);  w=rand(p,1);  y=exp((u+w).^2);  z2 = (u+w).^2;
> cov_est=cov([y z2])

 cov_est =
         31.3877    4.1800
          4.1800    0.6960

> c_est = - cov_est(1,2)/cov_est(2,2)

 c_est =  -6.0061

> % Now do main simulation
> u = rand(n,1); w=rand(n,1);  y = exp((u+w).^2);  z2 = (u+w).^2;
> v = y + c_est*(z2 - 7/6);
> mean(y), std(y)     % Check the mean and std of usual estimator

 ans =   5.0340    6.2507

> mean (v), std(v)     % Check the mean and std of new estimator

 ans =   4.9329    3.1218

> % Now compute confidence intervals
> CI = [mean(v) - 1.96*std(v)/sqrt(n), mean(v) +  1.96*std(v)/sqrt(n)]

  CI =   4.7394    5.1263
```

El Problema

- En general queremos comparar distintas configuraciones.
- Significa estimar parametros y compararlos.
- ¿Cuándo podemos decir que son distintos?

Ejemplo

Compararemos un sistema M/M/1 con un sistema M/M/2. En sistema M/M/1 llegadas son 10 por unidad de tiempo, y atendemos 11 clientes por minutos. En sistema M/M/2 llegadas son 10 por unidad de tiempo, y cada servidor atiende 5.5 clientes por minutos.

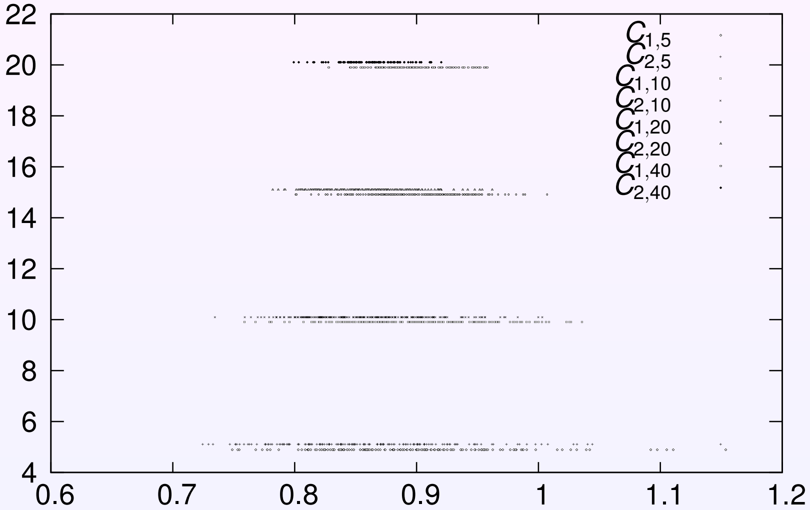
Comparando estimadores de μ

- Supongamos que ambas configuraciones cuestan lo mismo.
- Escoger sólo dependera de calidad de servicio.
- Medimos calidad de servicio como tiempo espera promedio.

Primer reflejo

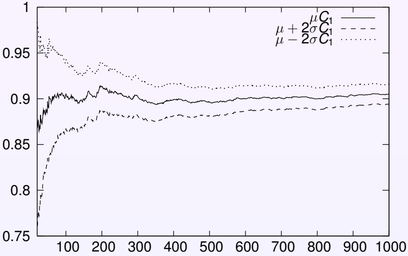
Supongamos que tenemos un *especialista* que sabe de simulación. Simula ambos sistemas, y computa una estimación de μ para ambos sistemas con k corridas independientes.
El decide escoger el sistema con mejor tiempo de espera *estimada*

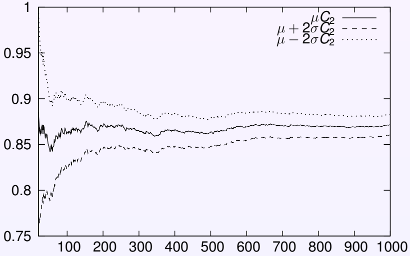
¿Cómo nos va?


22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
$C_{1,5}$
$C_{2,5}$
$C_{1,10}$
$C_{2,10}$
$C_{1,20}$
$C_{2,20}$
$C_{1,40}$
$C_{2,40}$

Otro Enfoque

- Un mejor enfoque seria calcular intervalos de confianza para ambos μ.
- Habria que alcanzar un nivel donde ambos intervalos no se overlapen.

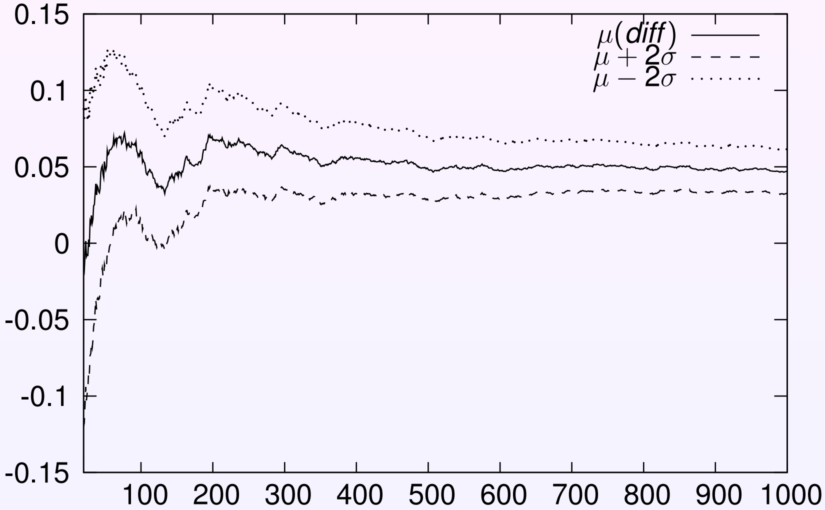




Algunas Observaciones

- El enfoque anterior funciona.... pero
- Típicamente requiere un número de replicaciones altas.
- Sufre de los problemas de no-simetria de las distribuiciones subjacentes.
- El problema anterior podríamos solucionarlo.
- Considerando diferencia de los estimadores.
- Analizamos $Z_n = X_n - Y_n$.
- Z_n tiende a tener una alta simetria.
- Decimos que configuraciones son distintas si 0 no esta en intervalo de confianza.

¿Cómo nos va con este enfoque?



Podemos Mejorar?

- Otra forma de comparar sistemas o configuraciones.
- Exacerbar differencias en lo sistemas.
- Comparar bajo situaciones de stress del sistema.
- Ello causa diferencias más sustanciales en los estadísticos.

Caso de múltiples configuraciones:

Comparación con Standard:

- Elegimos una configuración base X^0.
- Comparamos k configuraciones $X^i : i = 1, \ldots, k$.
- Computamos intervalos de confianza de $X^0 - X^i : i = 1, \ldots, k$ a nivel $1 - \alpha/k$.
- Obtenemos Intervalo de confianza global de $1 - \alpha$.

Caso de múltiples configuraciones:

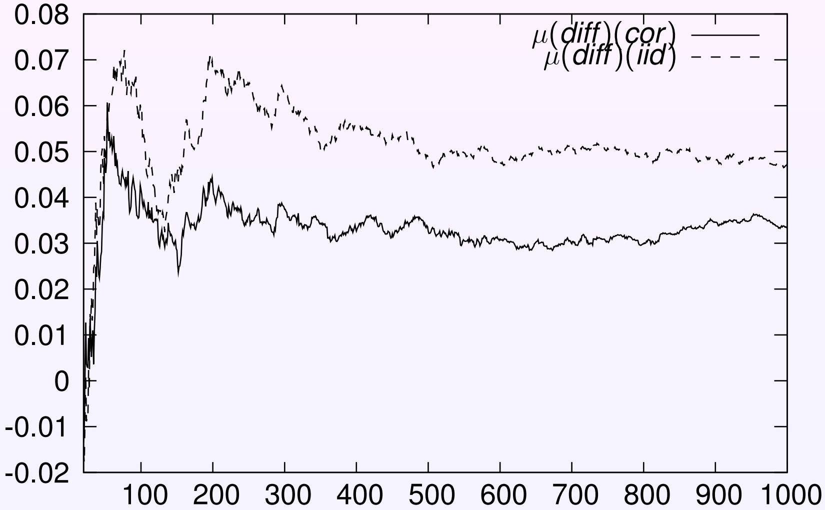
Comparacion todos los pares:

- Dado k configuraciones $X^i : i = 1, \ldots, k$.
- Comparamos todos los pares i, j.
- Computamos intervalos de confianza para $X^i - X^j : i, j = 1, \ldots, k, i \neq j$ de nivel $1 - \alpha/k(k-1)$.
- Obtenemos Intervalo de confianza global de $1 - \alpha$.

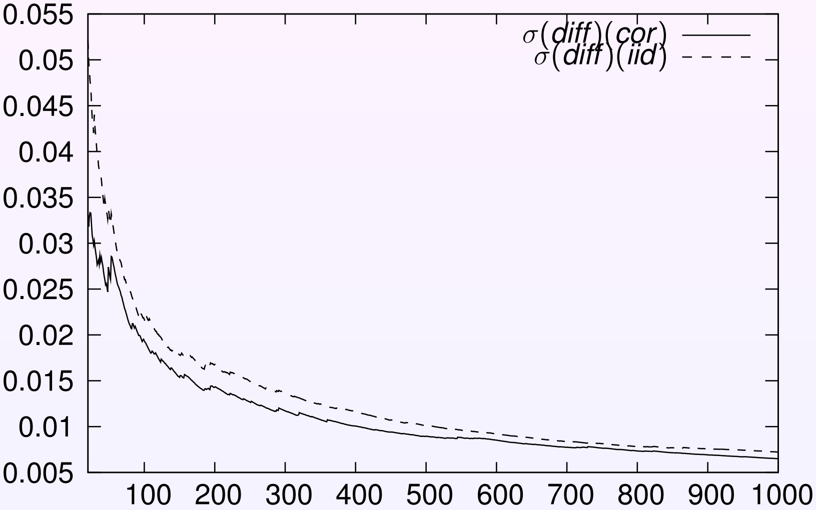
¿Qué comparamos cuando comparamos?

- Típicamente comparamos un sistema bajo distintas reglas de operación.
- Los enfoques anteriores comparan ciegamente.
- Llevan a una alta varibilidad.
- ¿Qué queremos realmente?
- Comparar sistema en condiciones lo más cercanas posibles.
- En nuestro ejemplo, ¿qué significaría esto?
- Sistema bajo *misma* demanda.
- Notese que ahora correlación de X e Y no es cero.
- Lleva a menores varianzas.
- requiere menos replicaciones para resultados confiables.

Impacto en Ejemplo



Impacto en Ejemplo



¿Qué quedó afuera?

- Generar variables aleatoreas correlacionadas.
- Validando supuestos del modelo
    - Habría que hacer análisis estadísticos.
- Caso de sistemas en estado estacionario.
- Análisis de sistemas oscilantes.
- Buscando buenos generadores de números aleatoreos.