Benders para el ejemplo de clase.

$$\min \quad 3x_1 + \frac{1}{8}\sum_{s=1}^{8} C_2^s x_2^s$$

$$x_1 + h_1 \geq 10$$

$$h_1 \leq 5$$

$$\left.\begin{aligned} x_2^s + h_2^s &\geq d_2^s \\ h_2^s &\leq 5 + r^s - h_1 \end{aligned}\right\} \quad s = 1, \ldots 8$$

$$x_1, h_1, x_2^s, h_2^s \geq 0$$

<u>Problema maestro:</u>

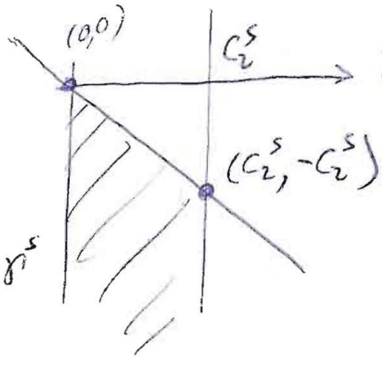
$$\min \quad 3x_1 + \frac{1}{8}\sum_{s=1}^{8} \gamma_s$$

$$x_1 + h_1 \geq 10$$

$$h_1 \leq 5$$

$$\gamma_s \geq d_2^s \pi^{ks} + (5 + r^s - h_1)\gamma^{ks}$$

$$x_1, h_1 \geq 0, \gamma_s$$



(π^{ks}, γ^{ks}) son puntos extremos del dual del subproblema:

$$\boxed{\begin{aligned} \pi^s &\leq C_2^s \\ \pi^s + \gamma^s &\leq 0 \\ \pi^s \geq 0, \ \gamma^s &\leq 0 \end{aligned}}$$

<u>subproblema</u>

para cada s

$$\phi_s(x_1, h_1) = \min \quad C_2^s x_2^s \qquad = \max \quad d_2^s \pi^s + (5 + r^s - h_1)\gamma^s$$

$$x_2^s + h_2^s \geq d_2^s \qquad \pi^s \leq C_2^s$$

$$h_2^s \leq 5 + r^s - h_1 \qquad \pi^s + \gamma^s \leq 0$$

$$x_2^s, h_2^s \geq 0 \qquad \pi^s \geq 0, \ \gamma^s \leq 0$$

note que $\forall (x_1, h_1)$ $\phi_s(x_1, h_1)$ es siempre factible $(x_2^s, h_2^s) = (d_2^s, 0)$

$\therefore$ no son necesarios cortes de factibilidad (dual tiene óptimo finito)

Iteraciones

Paso 0.: $\min 3x_1 \quad \} \ (x_1^*, h_1^*) = (5,5) \qquad \gamma_s^* = -\infty$

$$x_1 + h_1 \geq 10$$
$$h_1 \leq 5$$
$$x_1, h_1 \geq 0$$

$$\phi_s(5,5) = \underset{s=1}{\left[S = (\overset{d_2}{15}, \overset{c_2}{1}, \overset{r}{0}) \right]} \qquad \phi_s(5,5) = 15 \cdot 1 + (5+0-5)(-1) = 15.$$

$s=2 \quad S = (10, 1, 0) \qquad \phi_s(5,5) = 10 \cdot 1 + (5+0-5)(-1) = 10$

$s=3 \quad S = (15, 5, 0) \qquad \phi_s(5,5) = 15 \cdot 5 + (5+0-5)(-5) = 75$

$4 \quad S = (10, 5, 0) \qquad \phi_s(5,5) = 10 \cdot 5 + 0(-5) = 50$

$5 \quad (15, 1, 10) \qquad \phi_s(5,5) = 15 \cdot 1 + (5+10-5)(-1) = 5$

$6 \quad (10, 1, 10) \qquad \phi_s(5,5) = 10 \cdot 1 + (5+10-5)(-1) = 0$

$7 \quad (15, 5, 10) \qquad \phi_s(5,5) = 15 \cdot 5 + (5+10-5)(-5) = 25$

$8 \quad (10, 5, 10) \qquad \phi_s(5,5) = 10 \cdot 5 + (5+10-5)(-5) = 0$

índice escenarios

opt solution $(\pi^{1s}, \gamma^{1s}) \ \forall s = 1, \dots 8.$

como $\gamma_s^* < \phi_s(5,5)$ para todo s, agregamos restricciones al maestro;

$$\min 3x_1 + \frac{1}{8} \sum_{s=1}^{8} \gamma_s$$
$$x_1 + h_1 \geq 10$$
$$h_1 \leq 5$$
$$x_1, h_1 \geq 0$$

$$\gamma_1 \geq 15 - (5 - h_1) = 10 + h_1$$
$$\gamma_2 \geq 10 - (5 - h_1) = 5 + h_1$$
$$\gamma_3 \geq 75 - 5(5 - h_1) = 50 + 5h_1$$
$$\gamma_4 \geq 50 - 5(5 - h_1) = 25 + 5h_1$$
$$\gamma_5 \geq 15 - (15 - h_1) = h_1$$
$$\gamma_6 \geq 10 - (15 - h_1) = -5 + h_1$$
$$\gamma_7 \geq 75 - 5(15 - h_1) = 5h_1$$
$$\gamma_8 \geq 50 - 5(15 - h_1) = -25 + 5h_1$$

$$\gamma_1, \dots \gamma_8 \geq 0$$

segunda iteración Benders.

sumando $\sum \gamma_s$ podemos escribir el maestro como $\min\ 3x_1 + \frac{1}{8}(60+24h_1)$

$x_1 + h_1 \geq 10$

$h_1 \leq 5 \quad x_1, h_1 \geq 0$

$$3x_1 + \frac{1}{8}(60+24h_1) = 3x_1 + 3h_1 + \frac{15}{2}$$

$\Rightarrow$ todos los $\left.\begin{array}{l} x_1 + h_1 \geq 10 \\ h_1 \leq 5 \\ x_1, h_1 \geq 0 \end{array}\right\}$ son óptimos $\Rightarrow$ Sol. prob. maestro $= 30 + \frac{15}{2}$

claramente si usamos $(x_1^*, h_1^*) = (5,5)$ voy a tener que $\gamma_s^* = \phi_s(5,5)$ ya que esta solución fué usada en la iteración anterior. (se repite lo que esté en la página anterior).

Tomemos entonces la solución óptima del maestro $(x_1^*, h_1^*) = (10, 0)$, esto $\Rightarrow$

S		γ_s^*	$\phi_s(10,0)$
1	$(15, 1, 0)$	$10 + h_1^* = 10$	$15 \cdot 1 + (5+0-0)(-1) = 10$
2	$(10, 1, 0)$	$5 + h_1^* = 5$	$10 \cdot 1 + (5+0-0)(-1) = 5$
3	$(15, 5, 0)$	$50 + 5h_1^* = 50$	$15 \cdot 5 + (5+0-0)(-5) = 50$
4	$(10, 5, 0)$	$25 + 5h_1^* = 25$	$10 \cdot 5 + (5+0-0)(-5) = 25$
5	$(15, 1, 10)$	$h_1^* = 0$	$15 \cdot 1 + (5+10-0)(-1) = 0$
6	$(10, 1, 10)$	$-5 + h_1^* = -5$	$10 \cdot 0 + (5+10-0)\ 0 = 0$
7	$(15, 5, 10)$	$5h_1^* = 0$	$15 \cdot 5 + (5+10-0)(-5) = 0$
8	$(10, 5, 10)$	$-25 + 5h_1^* = -25$	$10 \cdot 0 + (5+10-0)\ 0 = 0$

escenarios 6 y 8 tienen $\gamma_s^* < \phi_s(10,0) \Rightarrow$ se agregan al maestro los cortes:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_6 \geq 10 \cdot 0 + (15 - h_1) \cdot 0 = 0 \\ \gamma_8 \geq 10 \cdot 0 + (15 - h_1) \cdot 0 = 0 \end{array}\right]$$

al agregar estas restricciones al maestro se obtiene que la única solución posible es $(x_1^*, h_1^*) = (5,5)$.