INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

CURSO: IN4703/IN47A – GESTIÓN DE OPERACIONES I
PROFESORES: RENE CALDENTEY – ANDRÉS WEINTRAUB
AUXILIARES: OSCAR BAZAN – CONSUELO MEDEIROS – VALERIA NUÑEZ
COORDINADOR: JOSE ROJAS.
SEMESTRE: PRIMAVERA 2010

<u>Auxiliar 4</u>

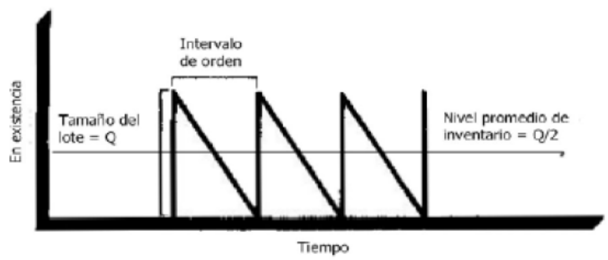
Gestión de Inventarios, Programación de operaciones

Modelos de Inventario:

Q: Tamaño de la orden
D: Demanda anual
T: Largo del ciclo
S: Costo fijo por orden
C: Costo del producto
I: tasa anual de costo de inventario (interés+almacenamiento)

1. Demanda Determinística:

- Sin ventas pendientes



Costo por período:

$$F = S + \frac{1}{2} ICQT$$

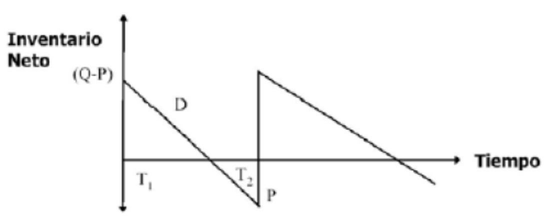
Costo anual:

$$TC = F\frac{1}{T} = F\frac{D}{Q} = S\frac{D}{Q} + \frac{1}{2} ICQ$$

Q* óptimo:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2SD}{IC}}$$

- Con ventas pendientes:

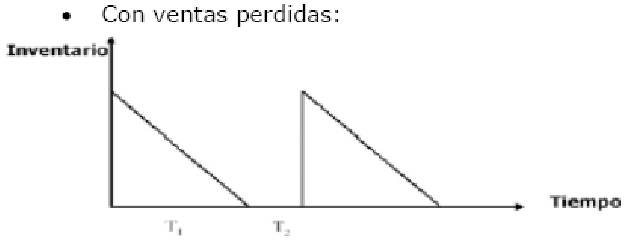


P: Ventas pendientes
π: Costo por venta pendiente
π^: Costo por venta pendiente por tiempo en satisfacerlas

Costo por período:

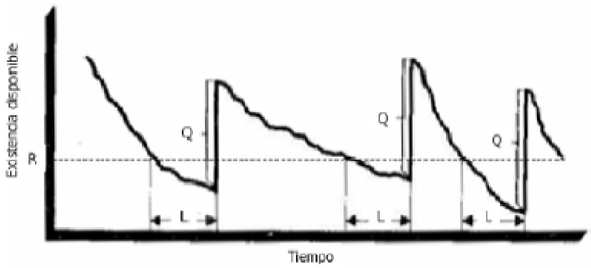
$$F = S + \frac{1}{2} ICQT_1(Q-P) + \pi P + \frac{1}{2}\hat{\pi} T_2 P$$

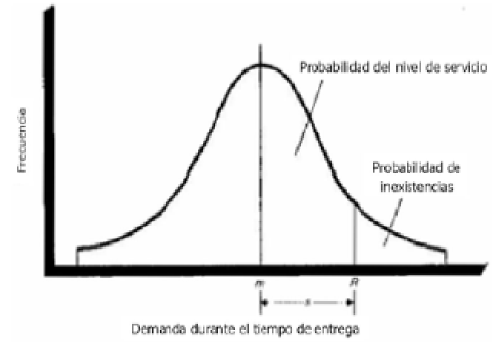
- Con ventas perdidas:



2. Demanda Aleatoria

• Sistema de Revisión Continua (Q):





Q: Tamaño de la orden (se usa Q*)

R: punto de reorden

L: tiempo de entrega

Nivel de Servicio: probabilidad de servir todas las demandas

m: Demanda media

s: Inventario de seguridad

$$CT = \frac{SD}{Q^*} + iC\overline{Q} \qquad \text{donde } \overline{Q} = \frac{Q^*}{2} + s$$

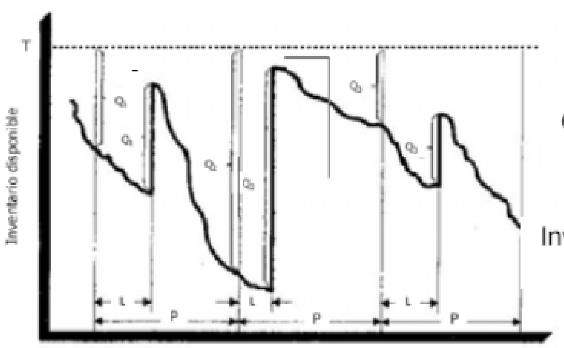
Punto de reorden:

$R = m + s = m + z\sigma$

z: factor de seguridad

σ: desviación estándar en tiempo de orden

- **Sistema de Revisión Periódica (P):**



$$CT = \frac{SD}{Q^*} + iC\overline{Q} \qquad \text{donde } \bar{Q} = \frac{m(p+L)}{2} + s^*$$

Inventario objetivo: $T = m' + s' = m' + z\sigma'$ (para P+L)

P: tiempo entre pedidos

T: inventario meta u objetivo, debe cubrir hasta que llegue el siguiente pedido

m': demanda promedio en P+L

s´: inventario de seguridad en P+L

Pregunta 1:

Considere una empresa que debe manejar el inventario de un solo producto. En una primera instancia va a considerar una demanda determinística para calcular sus pedidos. Se sabe que la demanda anual D es de 10.000 unidades, el costo por pedido S es de $2.000, el costo unitario del producto C es de $200 y el costo anual por unidad en bodega I es del 20 %.

1. **Calcule el tamaño de la orden y la frecuencia de pedidos al año.**

Datos:

D= 10000 unidades (demanda anual)

S= $2000 (costo fijo por orden)

C= $200 (costo unitario del producto)

I= 0.2 (costo anual inventario)

Usando la fórmula, tenemos que el tamaño de la orden es:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2SD}{IC}} \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2 * 200 \ * 1000}{0.2 * 200}} = 1000$$

la frecuencia es: $n = \frac{D}{Q^*} = \frac{10000}{1000} = 10$ (pedidos/ año)

2. **Para este mismo problema, resulta que se da cuenta de que la demanda es aleatoria y que usted tiene datos de las demandas por semana de todo un año. La función de probabilidades de demanda se asemeja a una normal y la empresa se maneja con revisión continua. ¿Cómo define el punto de reorden y el stock de seguridad si el tiempo de entrega es 2 semanas y desea una calidad de servicio del 95 %? Sólo indique cómo lo hace, no haga cálculos.**

R = m + s, donde s = z* σ

m = 2 * (demanda promedio semanal)

Para un 95% se tiene que z=1,96

Como los datos de demanda son semanales se tendría ó semanal, por lo que como el tiempo de entrega son 2 semanas se tiene que (2 semanas) = $\sqrt{2} \cdot \sigma\,(semanal)$

Pregunta 2:

Considere un almacén regional que compra herramientas normales a varios proveedores, y los distribuye a vendedores al detalle en la región. El almacén trabaja 5 días a la semana y 52 semanas al año. Tome en cuenta los siguientes datos para serruchos:

• Demanda diaria = 100 [serruchos].
• Desviación estándar de la demanda diaria = 30 [serruchos].
• Tiempo de entrega = 3 [días].
• Costo de manejo de inventario = $9,40[unidad/año].
• Costo de hacer el pedido = $ 35 por pedido

El almacén trabaja con nivel de servicio de 92% (lo que equivale a Z = 1,40).

1. **Calcule el costo anual del inventario para un sistema de revisión continua.**

El costo total de inventario se calcula como:

$CT = S \cdot n + iC\bar{Q}$ (costo pedido + costo inventario)

Luego, es necesario conocer el valor n (cantidad de pedidos y de $\bar{Q}$ el nivel promedio de inventario, para ello se tiene que en un sistema de revisión continua:

$$n = \frac{D}{Q^*}$$

$\bar{Q} = \frac{Q^*}{2} + s$, donde D es la demanda anual promedio, Q^* corresponde al Q de Wilson y s es el stock de seguridad de un sistema de revisión continua. Entonces:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2SD}{IC}} \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2 * 35 * 52 * 100}{9.4}} = 440.02 = 441 \text{ (serruchos)}$$

$$n = \frac{52 * 5 * 100}{441} = 58.95 \approx 59 \text{ (veces al año)}$$

$$\sigma(3dias) = \sqrt{3} \cdot \sigma(diario) = \sqrt{3} \cdot 30 = 51.96 \approx 52 \text{ (serruchos)}$$

$$s = z \cdot (3dias) = 1.4 * 52 = 72.8 \approx 73 \text{ (serruchos)}$$

=> $\bar{Q} = \frac{441}{2} + 73 = 293.5 \approx 294$ (serruchos)

Finalmente el costo anual será:

$$CT = S \cdot n + iC\bar{Q} = 35 \cdot 59 + 9.4 \cdot 294 = 4817.69$$ (pesos)

2. Calcule el costo anual de inventario para un sistema de revisión periódica.

Para este caso, nuevamente el costo anual de inventario viene dado por:

$$CT = S \cdot n + iC\bar{Q}$$

pero es necesario calcular el valor del tiempo de revisión (periódico), para ello:

p = días en el año/ veces que se pide

$p = \frac{5 * 52}{59} = 4.4 \approx$ 4 o 5 días (Se debe aproximar dependiendo de las políticas de la empresa)

En este caso tomaremos 5 (también pueden tomar 4, pues no hay información de las políticas de la empresa). Además necesitamos tener el valor de $\bar{Q}$, para eelo se tiene que en un sistema de revisión periódica:

$\bar{Q} = \frac{m(p+L)}{2} + s^*$, donde m(p+L) es la demanda promedio a satisfacer durante el tiempo de revisión más el tiempo que demora en llegar el pedido, y s^* es el inventario de seguridad para un sistema de revisión periódico, entonces:

$$m(p+L) = m(5+3) = m(8dias) = 8 * 100 = 800$$ (serruchos)

$$\sigma(p+L) = \sqrt{8} \cdot \sigma(diario) = \sqrt{8} \cdot 30 = 84.85 \approx 85$$ (serruchos)

$$s^* = z \cdot \sigma(p+L) = 1.4 * 85 = 119$$ (serruchos)

=> $\bar{Q} = \frac{800}{2} + 85 = 519$ (serruchos), con lo que tenemos $CT = 35 * 59 + 9.4 * 519 = 6943.6$ (pesos)

3. **Suponga que el almacén implementó el sistema de revisión continua. Ahora puede contratar un sistema de despacho expreso, el cual demoraría 2 días en lugar de los 3 días actuales en entregar los pedidos, pero tendría un recargo. Calcule el máximo recargo por cada viaje, de modo que el nuevo servicio expreso sea conveniente para el almacén. Haga y explicite los supuestos que estime necesarios y razonables. Justifique.**

El costo de inventario cambiará dado que el valor de L disminuye de 3 a 2 días. Entonces cambiarán los siguientes valores calculados en 1:

Ya que : $\sigma(2dias) = \sqrt{2} \cdot \sigma(diario) = \sqrt{2} \cdot 30 = 42.42 \approx 43$ tenemos:

- $s = z \cdot (2dias) = 1.4 * 43 = 60.2 \approx 61$ (serruchos)

- $\bar{Q} = \frac{Q^*}{2} + s = \frac{441}{2} + 61 = 282$, luego el costo anual será:

$CT = 35 * 59 + 9.4 * 292 = 4715.8$ (pesos)

Entonces, el ahorro anual que se obtiene es:

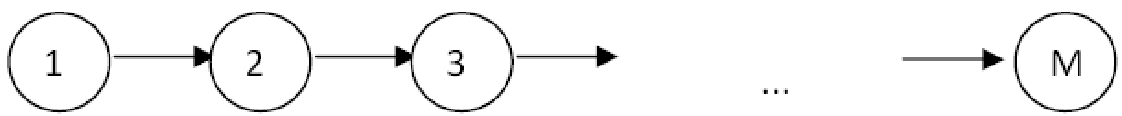
CT(L=3 dias)- CT(L=2 dias)=4817.69-4715.8=101.89 (pesos), luego el máximo recargo que se puede hacer por viaje realizado en el año es:

Recargo máximo = ahorro anual/ n° de viajes año $= \frac{101.89}{59} = 1.72$

Finalmente, el almacén está dispuesto a pagar a lo más 1.72 pesos extras o de recargo por cada pedido que se realiza teniendo en cuanta que se demorará 1 día menos en llegar.

Pregunta 3: (Control 3 IN47A – Otoño 2010)

Una fabrica de televisores LCD, dado el éxito en ventas de sus televisores producto del mundial, ha decido optimizar el uso de sus recursos para reducir los tiempos de producción y así generar una ventaja competitiva.
La empresa produce I modelos de televisores distintos, los cuales se deben procesar en M maquinas. Cada uno de los N modelos debe ser procesado en todas las maquinas, pasando siempre primero por la maquina 1, luego por la maquina 2, y así sucesivamente hasta terminar con la maquina M (todos los modelos pasan por las M maquinas en el mismo orden, dadas las similitudes entre ellos), tal como se muestra a continuación:



Sin embargo, algunos modelos de TV tardan mas tiempo que otros en las maquinas, debido a sus características especiales. Suponga que el tiempo de proceso en la maquina m del modelo de TV i esta dado por Tim.

1. Plantee un modelo de programación lineal entera para determinar el orden en que debe procesar los distintos modelos de televisores en las maquinas, de modo de minimizar el tiempo de transito total.

2. Suponga ahora que cada maquina es controlada por un operario. Suponga además que al departamento de operaciones se le ha asignado un presupuesto adicional PPTO para reducir los tiempos de producción. Usted ha decidido destinar este presupuesto para capacitar a sus trabajadores, con lo cual reducirá en Kim el tiempo de proceso de un modelo de televisor i en la maquina m. La capacitación para el operario de la maquina m cuesta Wm. Como modificaría su modelo de la parte anterior para incorporar la decisión de a que operarios capacitar?

Parte 1:

Variables:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si se produce modelo de TV j después de modelo i} \\ 0 \text{ sino} \end{cases}$$

t_{im} = Tiempo de comienzo del proceso del modelo i en la máquina m

$tFINAL$ = Tiempo en que se termina de procesar el último modelo en la última máquina.

Función objetivo: $\min\{tFINAL\}$

Restricciones:

1) Definición de tFINAL: (0,4 ptos.)

$$tFINAL \geq t_{iM} + T_{iM} \qquad \forall i$$

Nota: tFINAL es mayor o igual que todos los tiempos de proceso que llevan acumulados los trabajos en la máquina M. Así, el modelo i que tenga el mayor $t_{iM}+T_{iM}$ es el que le dará valor a la variable tFINAL, es decir, el último trabajo que pasó por esa máquina (pues es el que tiene mayor tiempo).

2) Se debe pasar por las máquinas en orden: (0,4 ptos.)

$$t_{i,m+1} \geq t_{i,m} + T_{i,m} \qquad \forall i, m \in \{1,\ldots,M-1\}$$

3) Sólo se puede usar la máquina cuando está desocupada: (0,4 ptos.)

$$t_{jm} \geq t_{im} + T_{im} - (1 - X_{ij}) * M \qquad \forall i, m, M >> 0$$

Nota: Las restricciones siguientes son para definir "la ruta", i.e. asegurarse de que se produzcan todos los modelos de televisores. *Es necesario agregar los nodos artificiales 0 e I+1*, después se mostrará por qué. ¡Las restricciones 4,5,6 y 7 son típicas restricciones de flujo en redes!

4) De cada nodo sale un arco: (0,4 ptos.)

$$\sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{I+1} X_{ij} = 1 \qquad \forall i$$

5) A cada nodo llega un arco: (0,4 ptos.)

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{I+1} X_{ij} = 1 \qquad \forall j$$

6) Evitar subtours: (0,4 ptos.)

$$\sum_{i,j \in U} X_{ij} \leq |U| - 1 \quad \forall\, U \subseteq \{0,1,\ldots,I,I+1\} \text{ t.q. } 2 \leq |U| \leq I-2$$

Nota: Ojo con el conjunto U, subconjunto de los nodos del 0 al I+1.

7) Condición de borde para que funcione bien la restricción 6 (existe el arco entre nodos I+1 y 0): (0,4 ptos.)

$$X_{I+1,0} = 1$$

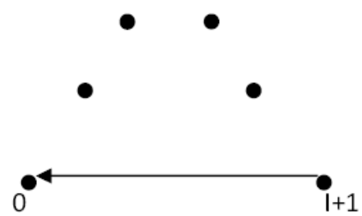
8) Naturaleza de las variables: (0,2 ptos.)

$$X_{ij} \in \{0,1\};\, t_{im} \geq 0,\, tFINAL \geq 0 \qquad \forall i, m$$

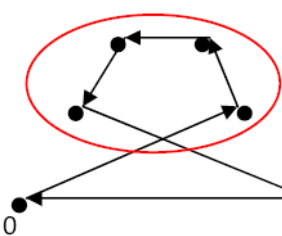
Ejemplo sobre como se entiende la restricción de subtours (restricciones 6 y 7) en éste problema. Lo que les expliqué en clases es el funcionamiento general de una restricción para evitar subtours. En éste caso, se deben considerar como nodos los modelos (I) y los arcos están dados por la variable binaría X_{ij}, es decir, los arcos son la relación "el modelo j se produce después del modelo i.

Ejemplo: La idea es crear una ruta desde el trabajo que se realiza primero hasta el trabajo que se realiza al final, pero esta ruta no regresa al origen como en problemas de transporte o flujo en redes típicos (ej: vendedor viajero). Una vez que llegamos al último nodo nos quedamos ahí, por lo que hay que crear los nodos artificiales 0 e I+1 y obligar a que exista el arco de I+1 a 0. Con el dibujo a continuación se muestra por qué esto funciona:

Configuración inicial, donde se realizan I=4 modelos de TV distintos Los nodos artificiales 0 e I+1=5 fueron agregados junto con el arco:



Ahora se muestra una posible configuración final factible de acuerdo a las restricciones que hemos puesto:



Se encontró una ruta entre los 4 nodos originales de la red, y NO existe un camino entre el último nodo revisado y el primero, que es lo que se quería evitar con los nodos artificiales. Los tiempos en los nodos artificiales no nos afectan en nada dado los límites de la restricción 3, para i de 1 hasta I (sin considerar los nodos artificiales).

Parte 2:

Agrego variable: (0.3 ptos.)

$$Y_m = \begin{cases} 1 \text{ si capacito al operario de la máquina m} \\ 0 \text{ sino} \end{cases}$$

Cambio las siguientes restricciones: (0,2 ptos. c/u)

- Agrego el término $-K_{im}*Y_m$ que representa el ahorro en tiempo si capacito a m

1) $tFINAL \geq t_{iM} + T_{iM} - K_{iM} * Y_M$

2) $t_{i,m+1} \geq t_{i,m} + T_{i,m} - K_{im} * Y_m$

3) $t_{jm} \geq t_{im} + T_{im} - K_{im} * Y_m - (1 - Xij) * M$

El resto de las restricciones queda igual.

Agrego restricciones:

7') Naturaleza de la variable nueva: (0,2 ptos.)

$$Y_m \in \{0,1\} \qquad \forall m$$

8) Respetar presupuesto: (0,4 ptos.)

$$\sum_{m=1}^{M} Y_m * W_m \leq PPTO$$

Función objetivo queda igual.

Pregunta 4:

El Gerente de Campeonatos Nacionales de la ANFP le ha solicitado programar el Fixture del primer torneo de verano a desarrollarse en el país. Para ello le explica los siguientes requerimientos: (Consultar video enunciado en http://www.youtube.com/watch?v=uEPNHlPeCCU)

- Son 8 equipos: 2 del norte (Iquique y Cobreloa), 4 del centro (Everton, Universidad de Chile, Colo Colo y O'Higgins) y 2 del sur (Huachipato y la Universidad de Concepción)

- El sistema es un torneo todos contra todos de una rueda, por lo que son 7 fechas.

- Ningún equipo puede tener 3 partidos o más seguidos de local o de visita (como máximo 2 partidos seguidos de local o visita).

- Los equipos del norte no pueden jugar en fechas consecutivas en el sur. Los equipos del sur no pueden jugar en fechas consecutivas en el norte

- Universidad de Chile cruzado con Colo Colo (cuando uno de los 2 es local el otro es visita)

- Si un equipo es local con la U (Colo Colo) es visita con Colo Colo (la U)

- Everton debe ser visita en la fecha 3

- La televisión considera que los partidos más atractivos del torneo son: Iquique V/S Cobreloa, Everton V/S O'Higgins, Universidad de Chile V/S Colo Colo y Huachipato V/S Universidad de Concepción, es por ello que todos estos partidos deben jugarse entre la fecha 4 y 6. Lo ideal es que todos se jueguen en la fecha 5

Escriba un modelo de programación lineal que permita encontrar el Fixture para el torneo de verano.

Conjuntos:

$E = \{IQ, COB, U, CC, EV, OH, HUA, UDC\}$

$N = \{IQ, COB\}$

$S = \{HUA, UDC\}$

$F = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$R(i) = Archirrival\ de\ i \quad \forall i \in E$

Variables:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & si\ equipo\ i\ juega\ de\ local\ con\ equipo\ j\ en\ la\ fecha\ k \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

Restricciones:

1. **Cada equipo juega una vez por fecha:**
   $\sum_j x_{ijk} + \sum_j x_{jik} = 1 \quad \forall i \in E, k \in F$
2. **Cada par se enfrenta una vez:**
   $\sum_k x_{ijk} + \sum_k x_{jik} = 1 \quad \forall i, j \in E, i \neq j$
3. **Nadie juega contra sí mismo:**
   $x_{iik} = 0 \quad \forall i \in E, k \in F$
4. **Nadie juega 3 partidos seguidos de local:**
   $\sum_{n=k}^{k+2} \sum_j x_{ijn} \leq 2 \quad \forall i \in E, k \in \{1,..,5\}$
5. **Nadie juega 3 partidos seguidos de visita:**
   $\sum_{n=k}^{k+2} \sum_j x_{jin} \leq 2 \quad \forall i \in E, k \in \{1,..,5\}$
6. **Equipos del Norte no viajan al Sur en semanas consecutivas:**
   $\sum_{j \in S} \left(x_{jik} + x_{ji(k+1)}\right) \leq 1 \quad \forall i \in N, k \in \{1,..,6\}$
7. **Equipos del Sur no viajan al Norte en semanas consecutivas:**
   $\sum_{j \in N} \left(x_{jik} + x_{ji(k+1)}\right) \leq 1 \quad \forall i \in S, k \in \{1,..,6\}$
8. **Colo Colo local, U de Chile visita y viceversa:**
   $\sum_j x_{CCjk} - \sum_j x_{jUk} = 0 \quad \forall k \in F$

   ó bien $\sum_j x_{Ujk} - \sum_j x_{jCCk} = 0 \quad \forall k \in F$

   ó bien $\sum_j x_{CCjk} + \sum_j x_{Ujk} \leq 1 \quad \forall k \in F \quad y \quad \sum_j x_{jCCk} + \sum_j x_{jUk} \leq 1 \quad \forall k \in F$

9. **Recibe a CC (U), visita a U (CC) y viceversa:**

$$\sum_k x_{iCCk} - \sum_k x_{Uik} = 0 \quad \forall i \in E/\{CC,U\}$$

ó bien $\sum_k x_{iUk} - \sum_k x_{CCik} = 0 \quad \forall i \in E/\{CC,U\}$

ó bien $\sum_k x_{iCCk} + \sum_k x_{iUk} \leq 1 \quad \forall i \in E/\{CC,U\} \quad y \quad \sum_k x_{CCik} + \sum_k x_{Uik} \leq 1 \quad \forall i \in E/\{CC,U\}$

10. **Everton visita en fecha 3:**

$$\sum_j x_{EVj3} = 0$$

ó bien $\sum_j x_{jEV3} = 1$

11. **Clásicos se juegan entre fecha 4 y 6:**

$$x_{iR(i)k} = 0 \quad \forall i \in E, k \in \{1,2,3,7\}$$

ó bien $\sum_{k \in \{1,2,3,7\}} x_{iR(i)k} = 0 \quad \forall i \in E$

ó bien $\sum_{k \in \{4,5,6\}} x_{iR(i)k} = \frac{|E|}{2} \quad \forall i \in E$

Función Objetivo:

$$Max\left\{\sum_i x_{iR(i)5}\right\}$$