INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso : IN4302
Semestre : Primavera 2010
Profesor : Arturo Cifuentes O.
Auxiliares: Sebastián Gutiérrez L.
Daniel Torres S.

Auxiliar N°4

Problema 1

Demuestre que el retorno de un activo i cualquiera puede expresarse como

$$r_i - r_f = \beta_{i,M} \cdot (r_M - r_f)$$

Donde

$$\beta_{i,M} = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}$$

Problema 2

Suponga que un activo que se transa en el mercado tiene un beta con respecto a su portafolio de inversión de 0,7. Se estima, por otro lado, que este activo debiera rentar un 12% anual. Si la tasa libre de riesgo está en 5% anual y el premio por riesgo de mercado (exceso de retorno del mercado por sobre la tasa libre de riesgo) es de 7% anual, ¿Compraría usted el activo? ¿Por qué?

Problema 3

Suponga que en una economía donde aplica el CAPM la tasa libre de riesgo es 6%, el retorno de la cartera de mercado es 10%, su volatilidad es 9%, y para los activos A y B los datos son:

	Retorno exigido	Volatilidad	Correlaciones	
			A	B
A	12%	8%	1	0,5
B	18%	6%	0,5	1

a) Determine el beta de A y el beta de B.
b) Determine el beta de la cartera de mercado.
c) Construya una cartera C, a partir del activo A y B que tenga beta=0 y cuyo retorno esperado sea igual a la tasa libre de riesgo.

Problema 4

Imagine que un modelo APT es apropiado para describir los retornos de una acción. En esta ocasión se estima que los retornos esperados de los activos presentes en el mercado dependen de sólo dos factores: La inflación y el precio del petróleo.

Activo	Factor 1: Inflación	Factor 2: Precio Petróleo
X	1,75	0,25
Y	-1	2
Z	2	1

Suponga que el premio por riesgo del factor 1 es de 4%, y del factor 2 es de 8%.

a) Muestre dos formas posibles de construir un portafolio que tiene sensibilidad de 0,5 al factor 1. Compare los premios por riesgo de cada inversión.

b) Suponga que los premios por riesgo de X, Y y Z son 8%, 14% y 16%, respectivamente. Construya un portafolio que tiene sensibilidad cero a cada factor y que tiene un premio por riesgo positivo. ¿Se cumple el APT en este caso?

Pauta Auxiliar N° 4

Problema 1

Consideremos una cartera (cartera q) compuesta por el activo i y la cartera de mercado. Sea α la proporción de la cartera invertida en el activo i. Así, el retorno y varianza de la cartera estarán dados por:

$$r_q = \alpha \cdot r_i + (1-\alpha) \cdot r_M$$
$$\sigma_q^2 = \alpha^2 \cdot \sigma_i^2 + (1-\alpha)^2 \cdot \sigma_M^2 + 2 \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot \sigma_{i,M}$$

La pendiente la línea de retorno riesgo para el portafolio q se calcula como

$$\frac{dr_q}{d\sigma_q} = \frac{\frac{\partial r_q}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \sigma_q}{\partial \alpha}}$$

Desarrollando,

$$\frac{\partial r_q}{\partial \alpha} = r_i - r_M$$
$$\frac{\partial \sigma_q}{\partial \alpha} = \frac{1}{2 \cdot \sigma_q} \cdot \frac{\partial \sigma_q^2}{\partial \alpha}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_q}{\partial \alpha} = \frac{1}{2 \cdot \sigma_q} \cdot \left[2 \cdot \alpha \cdot \sigma_i^2 - 2 \cdot (1-\alpha) \cdot \sigma_M^2 + 2 \cdot (1-\alpha) \cdot \sigma_{i,M} - 2 \cdot \alpha \cdot \sigma_{i,M} \right]$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_q}{\partial \alpha} = \frac{\alpha \cdot \left(\sigma_i^2 + \sigma_M^2 - 2 \cdot \sigma_{i,M}\right) + \sigma_{i,M} - \sigma_M^2}{\sigma_q}$$

Evaluando en $\alpha = 0$, es decir, todo invertido en la cartera M ($\sigma_q = \sigma_M$ si $\alpha = 0$):

$$\frac{dr_q}{d\sigma_q} = \frac{r_i - r_M}{\left(\frac{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2}{\sigma_M} \right)}$$

La pendiente anterior debe ser igual a la de la Línea de Mercado de Capitales (que une el activo libre de riesgo con la cartera M)

$$\frac{r_M - r_f}{\sigma_M} = \frac{r_i - r_M}{\left(\frac{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2}{\sigma_M} \right)}$$

Desarrollando,

$$\frac{r_M - r_f}{\sigma_M} = \frac{r_i - r_M}{\left(\frac{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)} \qquad / \cdot \sigma_M$$

$$r_M - r_f = \frac{r_i - r_M}{\left(\frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} - 1\right)}$$

$$(r_M - r_f) \cdot \left(\frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} - 1\right) = r_i - r_M$$

$$\frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} \cdot (r_M - r_f) - r_M + r_f = r_i - r_M \Rightarrow \qquad r_i - r_f = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} \cdot (r_M - r_f)$$

Luego, $r_i - r_f = \beta_{i,M} \cdot (r_M - r_f)$

Problema 2

Para calcular el retorno exigido al activo i dado el portafolio de inversión, usamos

$$r_i = r_f + \beta \cdot (r_M - r_f)$$

Luego $r_i = 5\% + 0{,}7 \cdot 7\% = 9{,}9\%$. Como se espera que el activo rente 12% (más que el retorno exigido), se debiera comprar el activo.

Problema 3

a)

$$\beta_A = \frac{r_A - r_f}{r_m - r_f} = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

$$\beta_B = \frac{12}{4} = 3$$

b) Por definición $\beta_m = \frac{\sigma_{mm}}{\sigma_m^2} = 1$

c) Si C = A*x + B*y , queremos encontrar x e y tal que:

1) $x^*r_A+y^*r_B=6\%$
2) $x^*\beta_A+y^*\beta_B=0$ => x=2 e y= -1

Es decir, se vende del activo B y se compran dos del activo A.

Problema 4

Sea w_i el peso relativo del activo i. Necesitamos imponer que:

$$w_x \cdot 1{,}75 + w_y \cdot -1 + w_z \cdot 2 = 0{,}5$$
$$w_x + w_y + w_z = 1$$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que hay infinitas soluciones. Eligiendo 2 de ellas, se tiene que:

Alternativa 1: $w_x = 0; w_y = 0{,}5; w_z = 0{,}5$

$$Premio_{Alt1} = 0 \cdot (1{,}75 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}08) + 0{,}5 \cdot (-1 \cdot 0{,}04 + 2 \cdot 0{,}08) + 0{,}5 \cdot (2 \cdot 0{,}04 + 1 \cdot 0{,}08)$$

$$\rightarrow Premio_{Alt1} = 0{,}14 = 14\%$$

Alternativa 2: $w_x = \frac{6}{11}; w_y = \frac{5}{11}; w_z = 0$

$$Premio_{Alt2} = \left(\frac{6}{11}\right) \cdot (1{,}75 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}08) + \left(\frac{5}{11}\right) \cdot (-1 \cdot 0{,}04 + 2 \cdot 0{,}08) + 0 \cdot (2 \cdot 0{,}04 + 1 \cdot 0{,}08)$$

$$\rightarrow Premio_{Alt2} = 0{,}104 = 10{,}4\%$$

Factor 1: $w_x \cdot 1{,}75 + w_y \cdot -1 + w_z \cdot 2 = 0$

Factor 2: $w_x \cdot 0{,}25 + w_y \cdot 2 + w_z \cdot 1 = 0$

Además se tiene que,

$w_x + w_y + w_z = 1$

Tenemos 3 ecuaciones y tres incógnitas. Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene que:

$$w_x = -2; w_y = -0{,}5; w_z = 1{,}5$$

El premio por riesgo de este portafolio es:

$$-2 \cdot 0{,}08 + (-0{,}5) \cdot 0{,}14 + 1{,}5 \cdot 0{,}16 = 0{,}01$$

Dado que la sensibilidad a cada factor es cero, el premio por riesgo debiera ser cero. Por lo tanto, el APT no se cumple.