INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso : IN4302
Semestre : Primavera 2010
Profesor : Arturo Cifuentes O.
Auxiliares: Sebastián Gutiérrez L.
Daniel Torres S.

Auxiliar N°2

Problema 1

Considere una economía en que existen sólo dos activos con correlación distinta de cero. Si usted quiere obtener una cartera con varianza mínima, encuentre la composición de cada uno de los activos en la cartera. ¿Cuál será el retorno esperado de la cartera?

Problema 2

Considere dos activos A y B con correlación 0,1.

Activo	Retorno esperado	Volatilidad
A	10%	15%
B	18%	30%

a.- Suponga que Ud. invierte en una cartera C, la cual está constituida en un 50% del activo A y en un 50% del activo B. ¿Cuál es el retorno esperado y la volatilidad de la cartera C?

b.- Determine el coeficiente de correlación entre el portafolio C y el activo A. Hint: Recuerde que Rho(R1,R2) = Cov(R1,R2)/(Sigma(R1)*Sigma(R2)) y además que Cov(R1,R2) = E(R1*R2) - E(R1)*E(R2))

c.- Suponga que existe además en esta economía un activo libre de riesgo, con retorno de 5%. Construya una cartera D con w% invertido en el activo libre de riesgo y (1-w)% en la cartera C. Encuentre el retorno esperado y la volatilidad de D en función de w.

Problema 3

Suponga un mercado en el cual se transan solamente 3 activos. Sus retornos esperados, volatilidad y matriz de correlaciones se detallan a continuación:

	Retorno Esperado	Volatilidad
Acción 1	15 %	30%
Acción 2	13%	25%
Acción 3	10%	20%

Matriz de Correlaciones

	Acción 1	Acción 2	Acción 3
Acción 1	1.00	0.45	0.70
Acción 2	0.45	1.00	0.30
Acción 3	0.70	0.30	1.00

R_f=5%

a) A usted se le pide asesorar a un inversionista en la creación de su cartera de inversión (peso de cada activo, rentabilidad y volatilidad). Usted tiene las siguientes restricciones:

i. El inversor necesita tener 30% de sus acciones invertidas en el activo menos riesgoso.

ii. El cliente quiere invertir en una cartera que minimice su riesgo.

b) Encuentre ahora la cartera que entrega una rentabilidad del 15%, manteniendo la primera condición anterior. Interprete estos resultados.

c) Asuma ahora que la cartera de mercado renta un 13%, y que se compone en un 10% de la acción 3. Encuentre la LMC.

Problema 4

Considere que la cartera de mercado renta un 14%, y que su volatilidad es del 20%. La tasa libre de riesgo es de un 5.5%.

i. Escriba la LMC de esta economía.

ii. ¿Qué rentabilidad esperada le reportaría una inversión con una volatilidad objetivo del 25%?

iii. ¿Cómo lo haría en la práctica para realizar la inversión anterior?

Pauta Auxiliar N° 2

Problema 1

Si en la economía existen dos activos, con correlación distinta de cero, se debe resolver el siguiente problema de optimización cuadrática para minimizar la varianza:

$$\begin{aligned} &\min w'\Omega w \\ s.a. &\sum w_i = 1 \\ &w_i \geq 0, \forall i \end{aligned}$$

Luego, si en la economía existen dos activos, la expresión queda

$$\mathbf{min}\, \boldsymbol{\sigma^2} = \boldsymbol{w^2 * \sigma_1^2 + (1-w)^2 * \sigma_2^2 + 2 * w * (1-w) * \sigma_1 * \sigma_2 * \rho_{12}}$$

Derivando la expresión con respecto a w, obtenemos la condición de primer orden.

$$\frac{\mathbf{d}\,\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{dw}} = \boldsymbol{w * \sigma_1^2 - (1-w) * \sigma_2^2 + (1-w) * \sigma_1 * \sigma_2 * \rho_{12} - w * \sigma_1 * \sigma_2 * \rho_{12} = 0}$$

Despejando w de la ecuación, obtenemos:

$$\boldsymbol{w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1 * \sigma_2 * \rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 * \sigma_1 * \sigma_2 * \rho_{12}}}$$

Luego, la composición del activo 1, es w, y la del activo 2 es (1-w).

El retorno esperado es:

$$\boldsymbol{E(R) = w * R_1 + (1-w) * R_2}$$

Problema 2

a.- La cartera C está constituida en un 50% por el activo A, y en un 50% por el activo B. El retorno esperado es:

$$\boldsymbol{E(R) = 0.5 * 10\% + 0.5 * 18\% = 14\%}$$

La varianza es:

$$\boldsymbol{\sigma^2 = 0.5^2 * 0.15^2 + 0.5^2 * 0.3^2 + 2 * 0.5 * 0.5 * 0.15 * 0.3 * 0.1 = 0.03}$$

Luego la volatilidad es:

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{0.03} = 0.1743 = 17.43\%}$$

b.- Se debe recordar que la covarianza es lineal. Dado esto,

$$Cov(R, R1) = Cov(0{,}5 * R1 + 0{,}5 * R2, R1)$$
$$Cov(R, R1) = 0{,}5 * Cov(R1, R1) + 0{,}5 * Cov(R2, R1)$$
$$Cov(R, R1) = 0{,}5 * {\sigma_1}^2 + 0{,}5 * Cov(R1, R2)$$
$$Cov(R, R1) = 0{,}5 * 0{,}15^2 + 0{,}5 * 0{,}15 * 0{,}3 * 0{,}1 = 0{,}0135$$

Luego, podemos calcular el coeficiente de correlación:

$$\boldsymbol{\rho = \frac{Cov(R, R_1)}{\sigma_c * \sigma_1} = \frac{0.0135}{0.1743 * 0.15} = 0.516}$$

c.- Con los datos del problema, el retorno esperado de la cartera D es:

$$\boldsymbol{E(R) = w * 0.05 + (1 - w) * 0.14}$$

Dado que el activo libre de riesgo, posee volatilidad cero, la volatilidad de la cartera D es:

$$\boldsymbol{\sigma_D = (1 - w) * \sigma_C}$$

Donde la volatilidad de la cartera C es conocida.

Problema 3

a.- Sabemos que $w3$=30%, por lo tanto, utilizando $w1$ para representar la composición del activo 1, $w2$=1−0,3−$w1$.

$$\sigma^2_{cartera} = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + 2w_1w_3\sigma_1\sigma_3\rho_{13} + 2w_2w_3\sigma_2\sigma_3\rho_{23}$$

$$\sigma^2_{cartera} = w_1^2 0{,}3^2 + (1-0{,}3-w_1)^2 0{,}25^2 + 0{,}3^2 0{,}2^2 + 2w_1(1-0{,}3-w_1)0{,}3\cdot 0{,}25\cdot 0{,}45 + 2w_1 0{,}3 \cdot 0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7 + 2(1-0{,}3-w_1)0{,}3\cdot 0{,}25\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3$$

$$\frac{\partial\sigma^2_{cartera}}{dw_1} = 0 \Rightarrow w_1 = 14{,}15\%$$

$$\Rightarrow w_2 = 55{,}85\%$$

Con esto, se tiene que:

$$E(r) = 0{,}1415\cdot 15\% + 0{,}5585 * 13\% + 0{,}3\cdot 10\%$$

$$\Rightarrow E(r) = 12{,}38\%$$

b.-

$$E(r) = 15\% \Rightarrow w_1\cdot 0{,}15 + (0{,}7-w_1)\cdot 0{,}13 + 0{,}3\cdot 0{,}1 = 15\%$$

$$\Rightarrow w_1 = 145\%\,; w_2 = -75\%$$

Esto significa que debo endeudarme en el activo 2 (venta corta) para comprar más del activo 1.

c.-

Primero, es necesario calcular los pesos de la cartera de mercado:

$$E(r) = 13\% \Rightarrow w_1\cdot 0{,}15 + (0{,}9-w_1)\cdot 0{,}13 + 0{,}1\cdot 0{,}1 = 14\%$$

$$\Rightarrow w_1 = 15\%\,; w_2 = 75\%$$

Luego, se calcula la volatilidad de la cartera de mercado:

$$\sigma_M^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + 2w_1w_3\sigma_1\sigma_3\rho_{13} + 2w_2w_3\sigma_2\sigma_3\rho_{23}$$

$$\sigma_M^2 = 0{,}0487$$

$$\sigma_M = 22{,}06\%$$

Así, la LMC queda descrita por:

$$r_i = r_f + \frac{(r_M - r_f)}{\sigma_M}\sigma_i$$

$$\mathbf{r_i = 5\% + \frac{(13\% - 5\%)}{22,06\%} * \sigma_i}$$

$$\mathbf{r_i = 5\% + 0,3626 * \sigma_i}$$

Problema 4

i.

$$LMC:\ r_i = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}\cdot\sigma + r_f$$

$$LMC:\ r_i = \frac{(14\% - 5.5\%)}{20\%}\cdot\sigma + 5.5\%$$

ii.

$$r_i = \frac{(14\% - 5.5\%)}{20\%}\cdot 25\% + 5.5\% = 16{,}125\%$$

iii.

$$E(r_i) = w_m \cdot 14\% + (1 - w_m)\cdot 5.5\% = 16{,}125\%$$

$$w_m = 1.25\ ;w_f = -0.25$$

Esto significa que me debo endeudar a la tasa libre de riesgo para poder comprar más de la cartera de mercado, y así poder rentar sobre ella.