Tarea 2: IN4221 Primavera

P1) Problema 18.4 del libro.

P2) Un cierto par origen-destino $s - t$ está conectado por m arcos $a_1, \ldots, a_m$. Por otra parte, los jugadores $\{1, \ldots, n\}$ deben elegir un arco para viajar de s a t. Denotamos una asignación factible por una matriz (x) en que $x_{ij} = 1$ si y sólo si el jugador j usa el arco a_i. Cada jugador experimenta un costo que depende del número de jugadores con índice menor que él que usan el mismo arco. Así pues si $C(j)$ denota el costo del jugador j y i es el arco tal que $x_{ij} = 1$, entonces:

$$C(j) = 1 + \sum_{k<j} x_{ik}.$$

Con esto, un perfil de estrategias mixtas está dado por una matrix (x) en que $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$ y $x_{ij} \geq 0$, y el costo del jugador j bajo este perfil es $C(j) = \mathbb{E}(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} C_{ij}$, donde $C_{ij} = 1 + \sum_{k<j} x_{ik}$.

(a) Escriba las condiciones de equilibrio en estrategias mixtas y pruebe que el juego admite uno.

(b) Pruebe que el juego admite un equilibrio en estrategias puras y que todos estos equilibrios son tambien óptimos sociales, donde el costo social es la suma de los costos de los agentes. Es decir, pruebe que el precio de la anarquía en estrategias puras es 1.

(c) Construya un ejemplo mostrando que el precio de la anarquia en estrategias mixtas es estrictamente mayor a 1.

(d) (Bonus) Pruebe que el precio de la anarquía en estrategias mixtas es constante.

P3) Pruebe el siguiente resultado. Supongamos que el juego G se juega durante T periodos y que cada jugador i utiliza un algoritmo aleatorizado A_i(Sobre el input: $l^{it} = c_i(\cdot, s_{-i}^t) \in \mathbb{R}^{|S_i|}$) cuyo regret interno es R_i^t. Entonces si definimos $\epsilon = \max_i R_i^T / T$, la distribución empírica

$$\pi^T(s_1, ..., s_n) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} p^{1t}(s_1) p^{2t}(s_2) ... p^{nt}(s_n)$$

es un ϵ-equilibrio correlacionado(Defiinición 4.11 del libro).