Control 2: IN4221 Teoría de Juegos

P1) Considere un monopolista que vende un bien, cuyo precio P esta determinado por la cantidad Q vendida de acuerdo a $P = 1 - Q$. El costo de producir Q unidades es $C(Q) = \theta Q$, donde θ es información privada y está distribuído de acuerdo a F en $[0, 1]$.

Un mecanismo consiste en $Q : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ y $T : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$, donde $Q(\theta')$ es la cantidad a producir si el monopolista declara θ' (el precio P queda determinado por esta cantidad) y $T(\theta')$ es una transferencia al monopolista. Dado un mecanismo, el monopolista elige un $\theta' \in [0, 1]$ a anunciar (no necesariamente su verdadero θ) de forma de resolver $V(\theta) = \max_{0 \leq \theta' \leq 1}(1 - Q(\theta') - \theta)Q(\theta') + T(\theta')$.

(a) Explique por qué elegir un mecanismo de la forma antes mencionada, y que además sea compatible en incentivos, es sin pérdida de generalidad. Escriba también la restricción de participación voluntaria del monopolista.

(b) El objetivo del diseñador de mecanismos es maximizar $\mathbb{E}_\theta[Q(\theta)(1 - Q(\theta))/2 - T(\theta) + \alpha((1 - Q(\theta) - \theta)Q(\theta) + T(\theta))]$, donde $0 < \alpha < 1$ es constante. Escriba el problema del regulador.

(c) Demuestre que un mecanismo compatible en incentivos cumple:
c.1) $Q(\theta)$ es no-creciente.
c.2) $V(\theta) = V(1) + \int_\theta^1 Q(s)ds$
c.3) $T(\theta) = V(1) + \int_\theta^1 Q(s)ds - (1 - Q(\theta) - \theta)Q(\theta)$.

(d) (Bonus) Demuestre que (c.1)-(c.3) implican que el mecanismo es compatible en incentivos.

(e) Escriba la función objetivo del regulador sólo como función de $Q(\cdot)$ y $V(1)$.

(f) Reescriba el problema del regulador y encuentre el mecanismo óptimo, haciendo una suposición adecuada sobre la distribución F.

P2) Un cierto par origen-destino $s - t$ está conectado por m arcos $a_1, \ldots, a_m$. Por otra parte, los jugadores $\{1, \ldots, n\}$ deben elegir un arco para viajar de s a t. Denotamos una asignación factible por una matriz (x) en que $x_{ij} = 1$ si y sólo si el jugador j usa el arco a_i. Cada jugador experimenta un costo que depende del número de jugadores con índice menor que él que usan el mismo arco. Así pues si $C(j)$ denota el costo del jugador j y i es el arco tal que $x_{ij} = 1$, entonces:

$$C(j) = 1 + \sum_{k<j} x_{ik}.$$

Con esto, un perfil de estrategias mixtas está dado por una matrix (x) en que $\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1$ y $x_{ij} \geq 0$, y el costo del jugador j bajo este perfil es $C(j) = \mathbb{E}(C_{ij}) = \sum_{i=1}^m x_{ij}C_{ij}$, donde $C_{ij} = 1 + \sum_{k<j} x_{ik}$.

(a) Escriba las condiciones de equilibrio en estrategias mixtas y pruebe que el juego admite uno.

(b) Pruebe que el juego admite un equilibrio en estrategias puras y que todos estos equilibrios son tambien óptimos sociales, donde el costo social es la suma de los costos de los agentes. Es decir, pruebe que el precio de la anarquía en estrategias puras es 1.

(c) Construya un ejemplo mostrando que el precio de la anarquia en estrategias mixtas es estrictamente mayor a 1.

(d) (Bonus) Pruebe que el precio de la anarquía en estrategias mixtas es constante.

P3) Un conjunto N de jugadores desea recibir un servicio, por el cuál el jugador $i \in N$ está dispuesto a pagar u_i. Para ello consideramos un árbol $G = (V, T)$ en que el conjunto de vértices $V = N \cup \{f\}$, donde f es el nodo fuente, el que origina el servicio. Cada arco $e \in T$ tiene un costo c_e, y el costo de proveer el servicio a un subconjunto de agentes $S \subseteq N$, denotado por $c(S)$, es el costo del subárbol que conecta a todos los vértices en S con f.

(a) Pruebe que el core del juego es no vacío.

(b) En el esquema de repartición de costos *secuencial* se fija un orden sobre N. Luego, los jugadores en $S \subseteq N$ son considerados en ese orden y cada jugador $i \in S$ paga el costo de todos los arcos en el camino de él hacia f que no han sido usados por jugadores anteriores. Pruebe que este esquema es 1-balanceado y multimonótono.

(c) En el esquema de repartición de costos *equitativo* cada $i \in S$ paga c_e/n_e por cada arco $e \in T$ que se encuentra en su camino hacia f, donde n_e denota el número de jugadores que usan e. Pruebe que este esquema es 1-balanceado y multimonótono.

(d) Usando el teorema de Moulin deduzca mecanismos a prueba de coaliciones y 1-balanceados.