Control 1: IN4221 Teoría de Juegos

P1) Dos rutas A y B conectan un cierto par origen-destino, con tiempos de viaje que dependen del número de usuarios en cada ruta,

$$\begin{aligned} c_A(n_A) &= 1.2n_A - 0.4 \\ c_B(n_B) &= 0.8n_B + 0.4 \end{aligned}$$

Consideremos dos jugadores los cuales deben escoger una ruta, de modo que sus conjuntos de estrategias son $S_1 = S_2 = \{A, B\}$.

(a) (1.5 puntos) Explicite la matriz de pagos del juego y determine todos los equilibrios de Nash.

(b) (1.5 puntos) Encuentre el poliedro P de los equilibrios correlacionados y verifique que todos los equilibrios encontrados en la parte (a) están en P.

(c) (1.5 puntos) Si usted fuera arbitro de este juego, que equilibrio correlacionado escogería y justifique el porqué.

(d) (1.5 puntos) Consideremos un caso similar al anterior pero con n jugadores los cuales escogen una ruta $r \in R := \{1, \ldots, m\}$. El costo de la ruta r es una función creciente $c_r(n_r)$ de la cantidad total n_r de usuarios que eligen dicha ruta. Sea $s = (s_1, \ldots, s_n) \in R^n$ un perfil de estrategias y definamos

$$U(s) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{u=1}^{n_r} c_r(u)$$

donde $n_r = |\{s_i = r\}|$ es el número de usuarios que escogen la ruta r. Sea s^* una solución óptima de $\min_{s \in R^n} U(s)$. Pruebe que s^* es un equilibrio de Nash en estrategias puras.

P2) Considere un vendedor y un comprador de un objeto. Ambos tienen información privada respecto a su valoración por el bien θ_C y θ_V en $[0, 1]$.

(a) (2 puntos) Calcule el mecanismo de VCG con pivot de Clark para esta situación. Verifique que ambos jugadores están mejor que si no participaran (en tal caso el comprador obtiene 0 y el vendedor θ_V). Demuestre además que la suma de los pagos de cada agente es siempre menor que 0, por lo que el mecanismo requiere un subsidio externo para funcionar.

(b) (2 puntos) Un mecanismo que no requiere subsidio externo (y donde ambos tienen incentivos a participar) es el siguiente: el vendedor anuncia θ_V y el comprador θ_C. El comprador entonces paga $0.5\theta_V + 0.5\theta_C$ al vendedor. Es este mecanismo compatible en incentivos (en estrategias dominantes)? Demuestre o entregue un contraejemplo.

Considere ahora el caso en que el vendedor tiene 2 objetos, que son sustitutos entre si. Las utilidades de cada agente vienen dadas por

$$\begin{array}{ll} v_1^{2,0}(\theta_1) = (1+\alpha)\theta_1 & v_2^{2,0}(\theta_2) = 0 \\ v_1^{1,1}(\theta_1) = \theta_1 & v_2^{1,1}(\theta_2) = \theta_2 \\ v_1^{0,2}(\theta_1) = 0 & v_2^{0,2}(\theta_2) = (1+\alpha)\theta_2 \end{array}$$

con $\alpha \in (0, 1)$ un parámetro que mide la substitutabilidad entre los dos objetos.

(c) (2 puntos) Calcule el mecanismo VCG con pivote de Clark de este modelo. Suponiendo que $\theta_V, \theta_C \sim U[0, 1]$, calcule el subsidio esperado que requiere este mecanismo, y analice como cambia con α.

P3) Considere la siguiente adaptación del algoritmo exponencial al caso de información incompleta. En cada etapa t solamente observamos la componente seleccionada $\ell_{i_t}^t$ y definimos la secuencia $\tilde{\ell}^t$ de vectores de *pseudo-costos* mediante

$$\tilde{\ell}_i^t = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq i_t \\ \ell_i^t / p_i^t & \text{si } i = i_t \end{cases}$$

así como los pseudo-costos acumulados $\tilde{L}_i^t = \sum_{\tau=1}^{t} \tilde{\ell}_i^\tau$. Dados $\epsilon > 0$ y $\beta > 0$ tomamos

$$p_i^t = \epsilon \tfrac{1}{n} + (1-\epsilon) \tfrac{w_i^t}{W^t}$$

con $w_i^t = \exp(-\beta \tilde{L}_i^{t-1})$ y $W^t = \sum_{i=1}^{n} w_i^t$. Intuitivamente: con probabilidad ϵ escogemos i_t segun una ley uniforme y con probabilidad $(1-\epsilon)$ segun una ley exponencial.

(a) (2 puntos) Pruebe que $\tilde{\ell}^t$ es un vector aleatorio cuya esperanza es $\mathbb{E}(\tilde{\ell}^t) = \ell^t$.

(b) (2 puntos) Demuestre que este algoritmo tiene regret externo dado por:

$$R^T = T[\epsilon + (1-\epsilon)\gamma - 1] + \gamma(1-\epsilon)\tfrac{\ln(n)}{\beta},$$

donde $\gamma = \frac{n\beta}{\epsilon} / [1 - \exp(-\frac{n\beta}{\epsilon})]$.

(c) (2 puntos) Dado T, pruebe que es posible escoger ϵ y β de modo tal que $R^T << T$ para T grande (i.e., $\lim_{T\to\infty} R^T/T = 0$).