

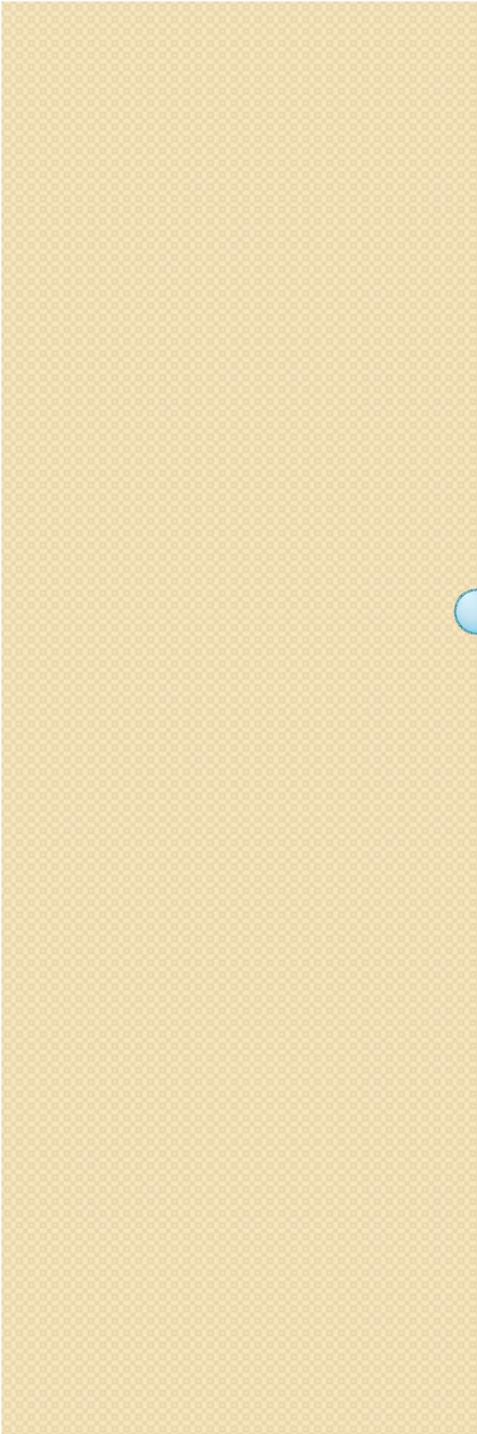


# Macroeconomía

Alexandre Janiak

*Dpto. de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile*

---



# **INVERSIÓN**

---

# Inversión

- Agregado muy volátil
- Para Chile, recuerden la desviación típica:
  - PIB = 1.9%
  - Inversión = 7%
- EEUU:
  - PIB = 1.6%
  - Inversión = 7.8%
- Elaboremos una teoría capaz de reproducir tal característica



# Teoría neoclásica de la inversión

- Enfoque dinámico
- Jorgensen (1963)
- Como la inversión se relaciona con el costo de oportunidad del capital

# Tiempo discreto versus continuo

- ¿Cómo pasar de la formulación en tiempo discreto al tiempo continuo?
- En tiempo discreto:

$$\Pi = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \pi_t$$

- En tiempo continuo:

$$\Pi = \int_{t=0}^{\infty} e^{-rt} \pi_t dt$$

# Tiempo discreto versus continuo

- Tiempo continuo:
  - ¿cuanto vale \$1 después de un tiempo  $T$ ?
- Intervalo de tiempo  $[0, T]$  dividido en intervalos de tamaño  $\Delta t$
- La tasa de interés después de cada intervalo es  $r\Delta t$
- El dólar vale

$$v = (1 + r\Delta t)^{T/\Delta t}$$

# Tiempo discreto versus continuo

- Ahora  $\Delta t$  tiende hacia cero

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 + r\Delta t)^{T/\Delta t}$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \exp\left(\log(1 + r\Delta t)^{T/\Delta t}\right)$$

$$v = \exp\left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (T / \Delta t) \log(1 + r\Delta t)\right)$$

# Tiempo discreto versus continuo

- Por la regla de l'hôpital:

$$v = \exp\left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r / (1 + r\Delta t)}{1/T}\right)$$

$$v = e^{rT}$$

# Inversión

- La empresa maximiza

$$\Pi_t = \int_t^{\infty} e^{-r(s-t)} \{ Af(k_s) - i_s \} ds$$

- Tal que

$$\dot{k}_t = i_t - \delta k_t$$

# Inversión

- Hamiltoniano

$$H = e^{-rt} \{ Af(k_t) - i_t \} + \Lambda_t [i_t - \delta k_t]$$

- Condiciones de primer orden

$$H_i = -e^{-rt} + \Lambda_t = 0$$

$$H_k = e^{-rt} Af'(k_t) - \delta \Lambda_t = -\dot{\Lambda}_t$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_t k_t \geq 0$$

# Inversión

- Notación

$$\Lambda_t = e^{-rt} \lambda_t$$

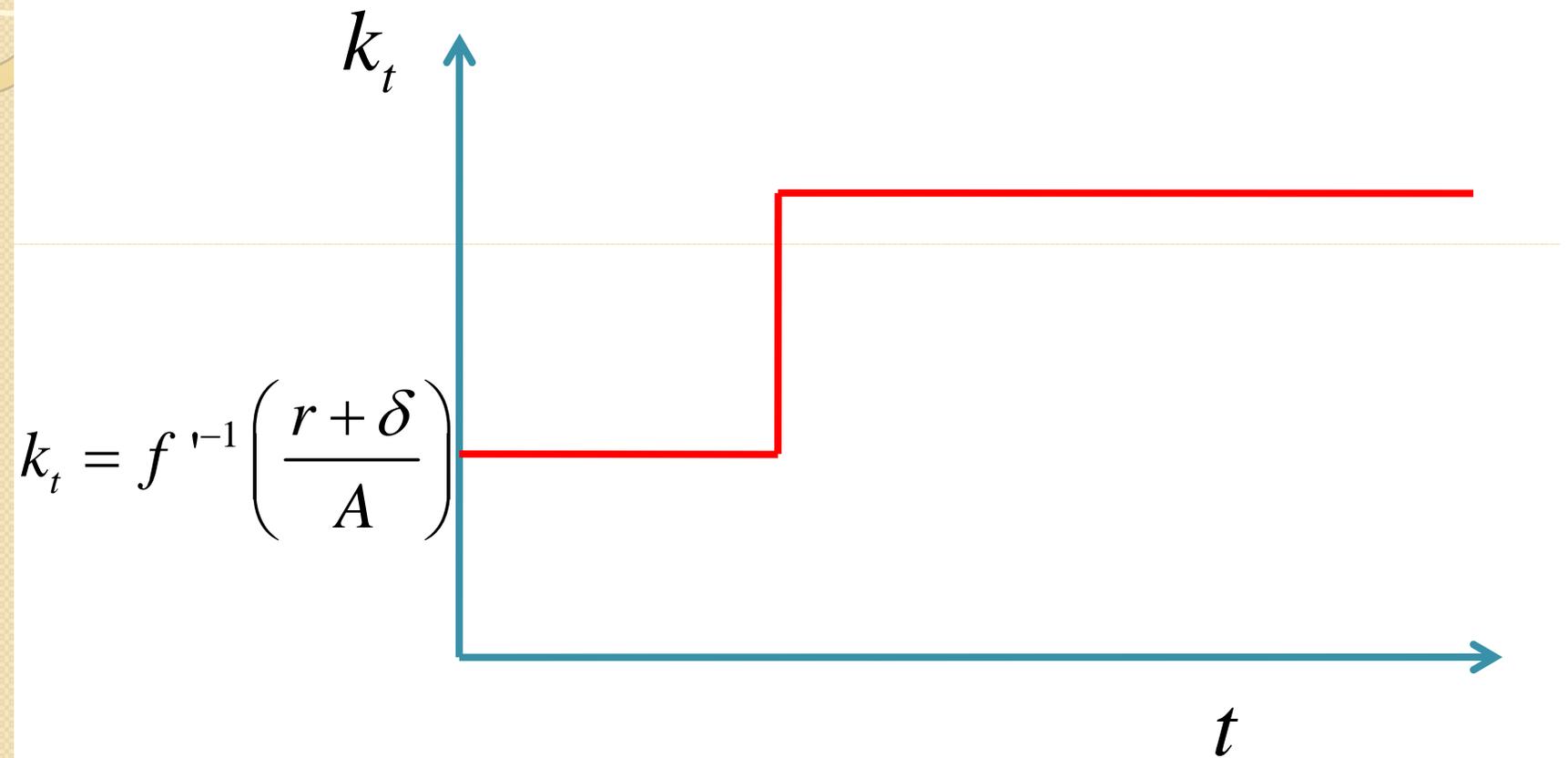
$$\Rightarrow \dot{\Lambda}_t = -re^{-rt} \lambda_t + e^{-rt} \dot{\lambda}_t$$

- Implica

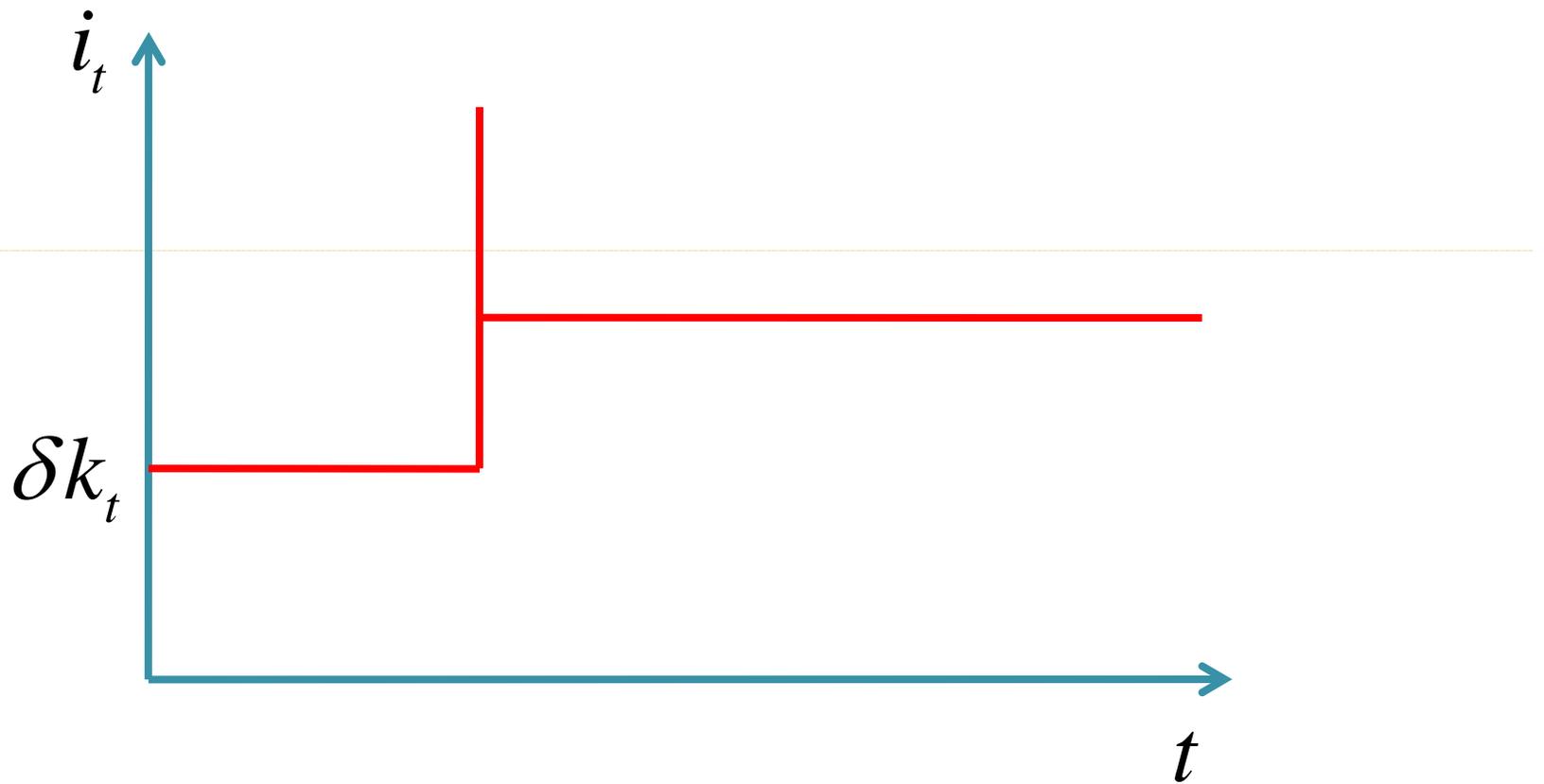
$$\lambda_t = 1 \Rightarrow \dot{\lambda}_t = 0$$

$$\dot{\lambda}_t = (r + \delta) \lambda_t - Af'(k_t) \Rightarrow Af'(k_t) = r + \delta$$

# Aumento permanente de A

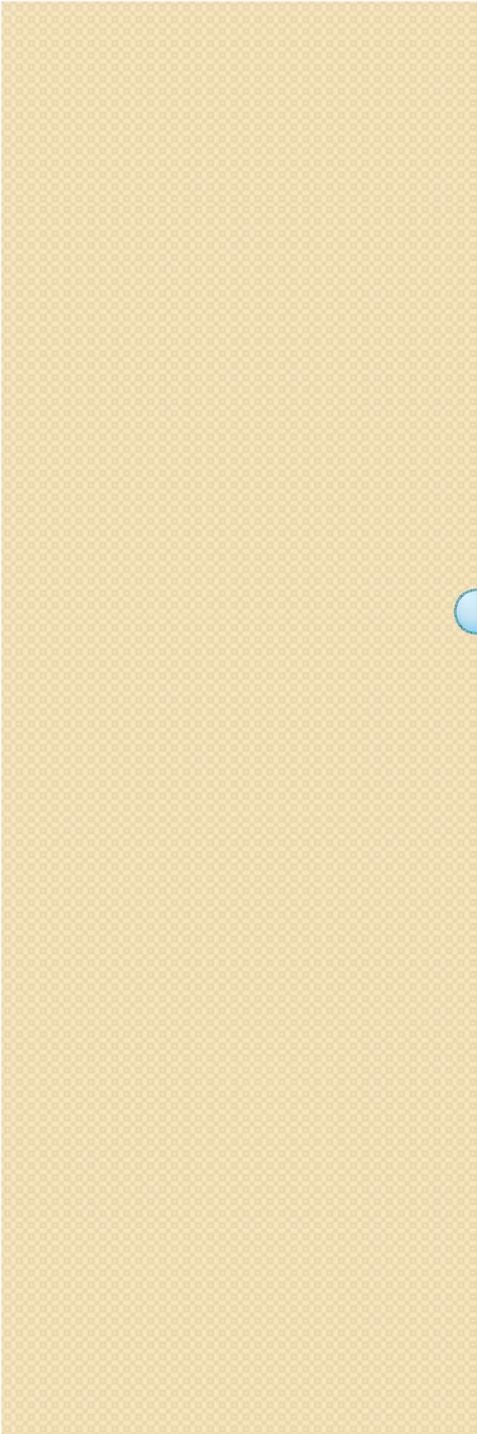


# Aumento permanente de A



# Inversión

- La inversión se ajusta instantaneamente
- De manera que productividad marginal iguale costo marginal
- Implica inversión muy volatil



**DEMASIADA VOLATIL?**

**LA Q DE TOBIN Y LOS  
COSTOS DE AJUSTE DE LA  
INVERSIÓN**

# La Q de Tobin

- Análisis de la inversión junto con el valor de la firma
- Valor del capital dentro versus fuera de la firma
- Los que han contribuido:
  - Tobin, premio Nobel 1981
  - Abel (1980)
  - Hayashi (1982)

# El programa de la empresa

- La empresa maximiza

$$\Pi = \int_t^{\infty} e^{-r(s-t)} \left\{ Af(k_s) - i_s [1 + \phi(i_s)] \right\} ds$$

- Tal que

$$\dot{k}_t = i_t$$

# El hamiltoniano

- Hamiltoniano

$$H = e^{-rt} \left\{ Af(k_t) - i_t [1 + \phi(i_t)] \right\} + Q_t i_t$$

- donde

$$Q_t = e^{-rt} q_t \Rightarrow \dot{Q}_t = e^{-rt} \dot{q}_t - re^{-rt} q_t$$

# Condiciones de primer orden

- CPO

$$1 + \phi(i_t) + i_t \phi'(i_t) = q_t \Leftrightarrow i_t = \gamma(q_t - 1)$$

$$Af'(k_t) = r_t q_t - \dot{q}_t$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_t k_t \geq 0$$

# Interpretación

- El ingreso marginal del K igual al costo de oportunidad del K:

$$rq_t - \dot{q}_t = Af'(k_t)$$

- Un incremento de I del stock aumenta el valor de la empresa de q:

$$q_t = \int_t^{\infty} e^{-r(s-t)} Af'(k_s) ds$$

# Interpretación

- $q$  es también el ratio del valor en el mercado de una unidad de capital sobre su costo de reemplazamiento:
  - El costo de reemplazamiento es  $1$
  - Si  $q > 1$ , capital aumenta
  - Si  $q < 1$ , capital disminuye

$$\phi(i_t) + i_t \phi'(i_t) = q_t - 1$$

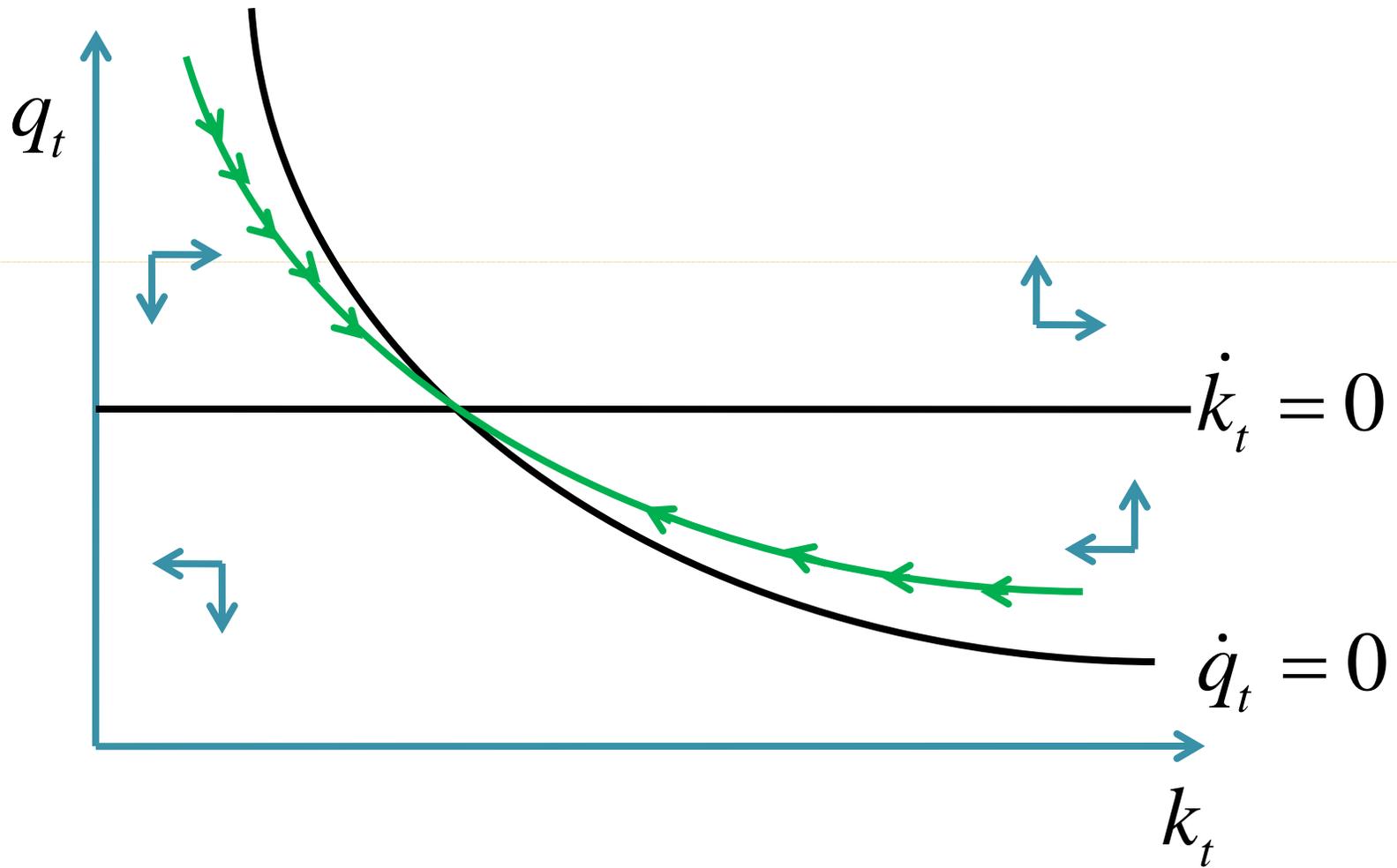
# Dinámica

- Se puede analizar un sistema en  $q$  y  $k$ :

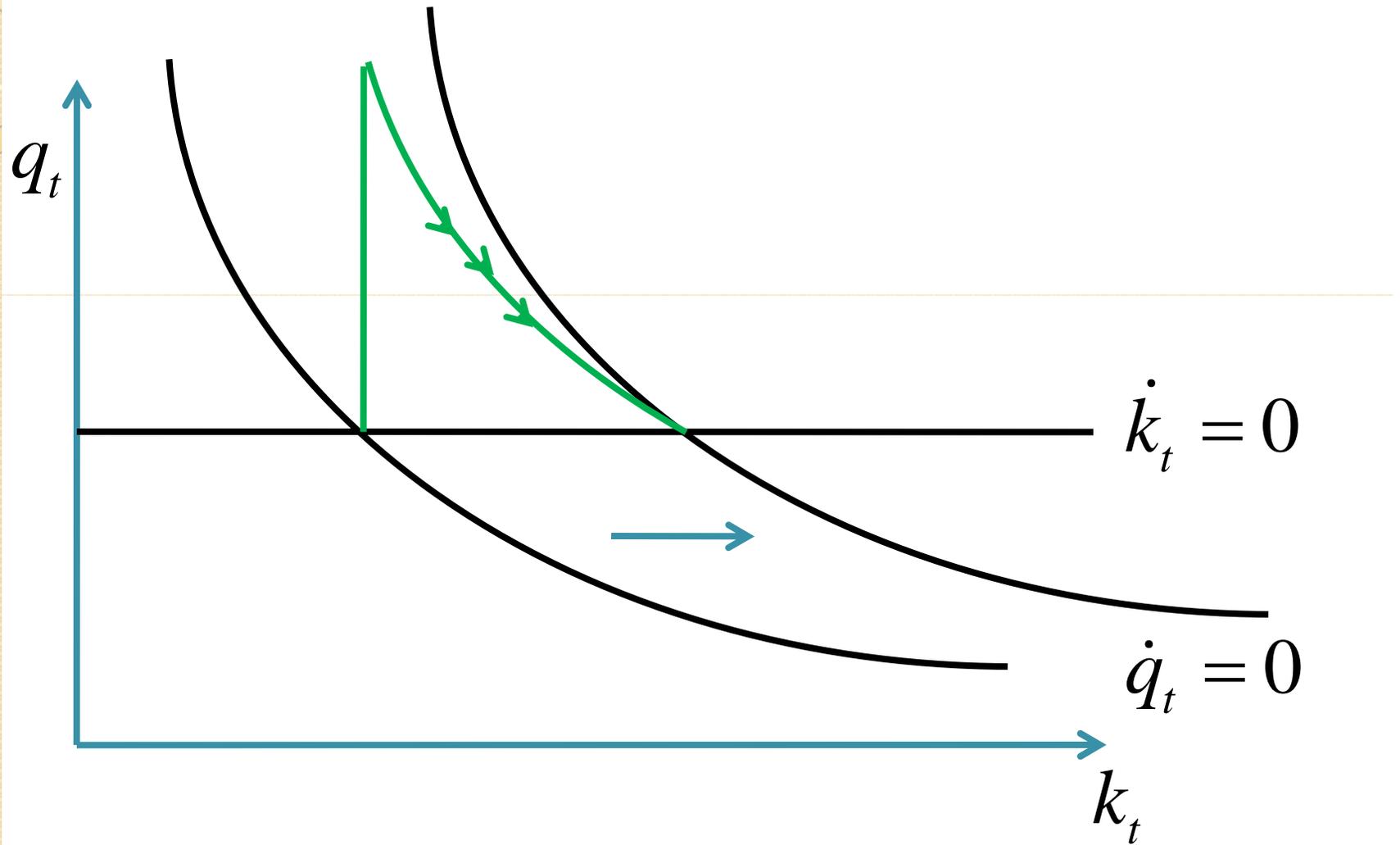
$$Af'(k_t) = rq_t - \dot{q}_t$$

$$\dot{k}_t = \gamma(q_t - 1)$$

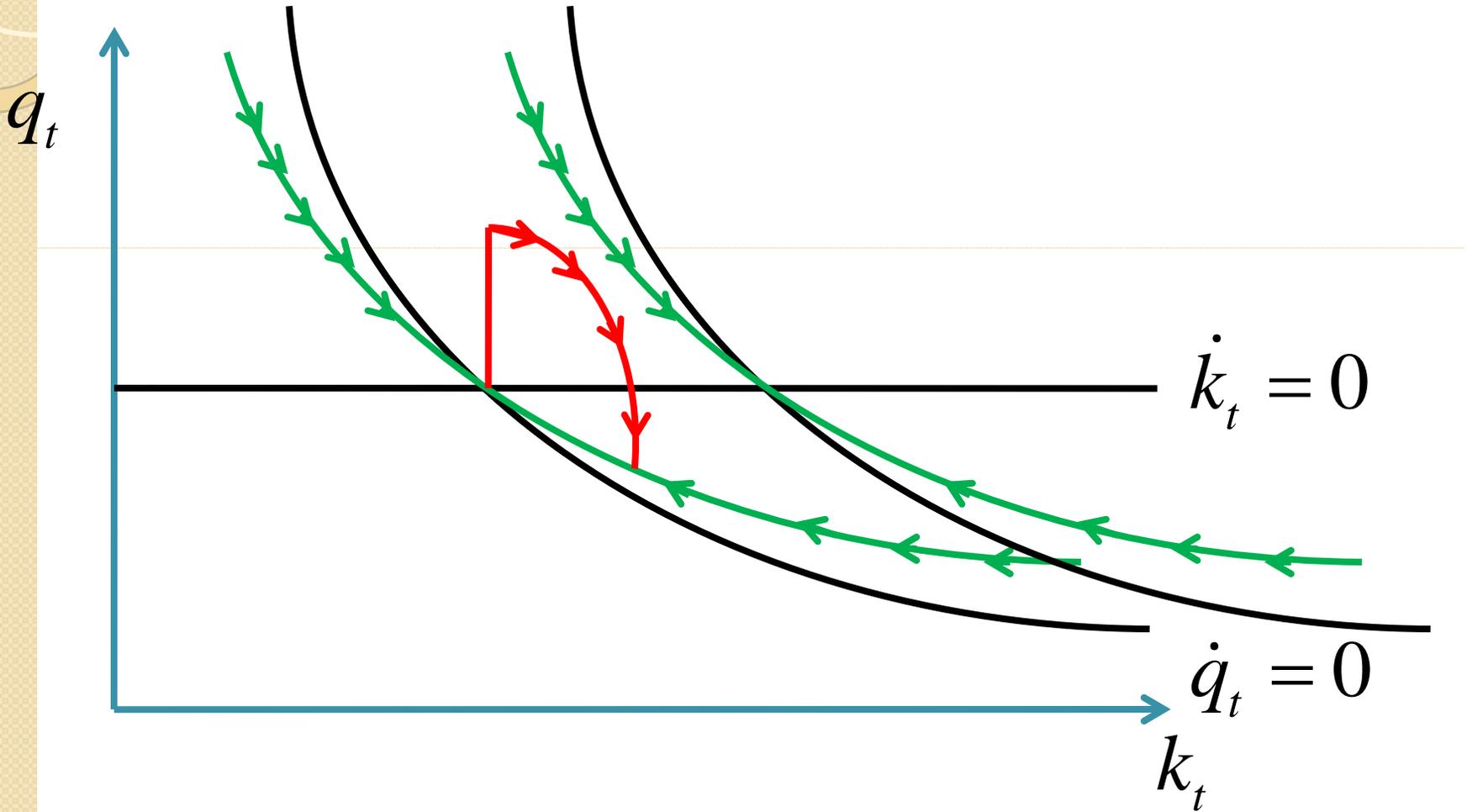
# Diagrama



# Incremento permanente de A



# Incremento temporal de A



# Disminucion permanente del tipo de interés

