INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN3702: Investigación de Operaciones
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: S. Astroza, N. Inostroza, F. Muñoz, LF. Solari

Examen

Martes 7 de Diciembre de 2010

Problema 1

Un proceso productivo consta de dos etapas consecutivas, A y B. Procesar una unidad en la etapa A toma un tiempo exponencial de parámetro $\mu_A = 20$ unidades/hora, en tanto en la etapa B el proceso toma un tiempo exponencial de parámetro $\mu_B = 10$ unidades/hora. Lamentablemente los procesos en las etapas A y B generan defectos: un 20 % de las unidades procesadas en A deben ser reprocesadas; un 10 % de las unidades procesadas en B deben ser reprocesadas sólo en la etapa B; y un 10 % de las unidades procesadas en B deben ser completamente reprocesadas (i.e., reingresar a la etapa A). El proceso productivo se alimenta de acuerdo a un proceso de poisson de parámetro γ unidades/hora.

a) `(2.0 puntos)` Determine la tasa máxima γ de alimentación del proceso de forma de que sea estable en el largo plazo.

b) `(2.0 puntos)` Suponga ahora que usted puede redistribuir las capacidades de producción de ambas etapas de forma que la suma $\mu_A + \mu_B = 30$ unidades/hora. ¿Cuál es la nueva tasa máxima γ de alimentación del proceso de forma de que sea estable en el largo plazo? ¿Cómo debe balancear las capacidades?

c) `(2.0 puntos)` Si por cada unidad producida sa ganan \$10.000, ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por una nueva tecnología que elimina los defectos generados en la etapa A?

Problema 2

En una bodega de capacidad infinita llegan cajas según un proceso de poisson de tasa λ. Un camión de carga con capacidad de K cajas llega a la bodega según un proceso de poisson de tasa μ y se lleva la mayor cantidad de cajas posibles.

a) `(1.5 puntos)` Modele `el número de cajas en bodega` como una Cadena de Markov en tiempo continuo y bosqueje la cadena. ¿Cuál es la condición para que el sistema sea estable?

b) `(1.5 puntos)` Sea π_k la probabilidad que en estado estacionario hayan k cajas en la bodega. Plantee un sistema de ecuaciones que permita obtener el valor de π_k para todo k.

c) `(1.5 puntos)` ¿Cuál es el tiempo promedio que pasa una caja en la bodega? ¿Cuál es el número esperado de cajas en la bodega?

d) `(1.5 puntos)` Considere que el dueño de la bodega gana por cada caja que guarda C pesos por unidad de tiempo y que debe pagar un monto de R pesos cada vez que el camión llega y encuentra la bodega vacía. Encuentre una relación entre C y R de manera que la bodega se autofinancie. `Indicación:` exprese los costos y beneficios promedio por unidad de tiempo.

Problema 3

Cada día un taxista puede operar en una de dos ciudades. Si opera en la ciudad i ($i = 1, 2$) en el dia k, gana una cantidad conocida r_k^i. Sin embargo, cada vez que cambia de ciudad de un dia para otro paga un costo de c (pero esto no toma tiempo). El taxista quiere maximizar sus ganancias a lo largo de N dias.

a) `(2.0 puntos)` Formule el problema como uno de programación dinámica.

b) `(2.0 puntos)` Suponga que el taxista se encuentra en la ciudad i en el dia k y llamemos $\bar{i}$ a la ciudad donde no está. Pruebe que si $r_k^{\bar{i}} - r_k^i \leq 0$ es óptimo que el taxista se quede donde está y si $r_k^{\bar{i}} - r_k^i \geq 2c$ es óptimo que se cambie de ciudad.

c) `(2.0 puntos)` Suponga ahora que cada día en la ciudad i hay una probabilidad p_i de que llueva y en tal caso las ganancias del taxista aumentarán en un factor $\beta_i > 1$. Formule este nuevo problema como uno de programación dinámica.

Fórmulas:

Little $L = \lambda W$

Sistema $M/M/1$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad \pi_n = \rho^n(1-\rho) \quad L = \frac{\rho}{1-\rho} \quad L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad W = \frac{1}{\mu-\lambda} \quad W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$$

Sistema $M/M/c$

$$\begin{matrix} \rho = \frac{\lambda}{c\mu} \\ r = \frac{\lambda}{\mu} \end{matrix} \quad \pi_n = \begin{cases} \frac{r^n}{n!}\pi_0 & \text{si } n \leq c \\ \frac{c^c \rho^n}{c!}\pi_0 & \text{si } n > c \end{cases} \quad \pi_0 = \frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{c} \frac{r^n}{n!} + \frac{c^c}{c!}\sum_{n=c+1}^{\infty} \rho^n\right)} \quad L = r + \left(\frac{r^c \rho}{c!(1-\rho)^2}\right)$$

Sistema $M/M/\infty$

$$r = \frac{\lambda}{\mu} \quad \pi_n = \frac{r^n e^{-r}}{n!} \quad L = r \quad W = \frac{1}{\mu}$$

Programación Dinámica

$$V_n(s_n, x_n) = E_s\left[B_n + V_{n+1}^*(s)\right]$$

$$V_{n+1}^*(s_{n+1}) = \max_{x_{n+1}} V_{n+1}(s_{n+1}, x_{n+1})$$

Distribuciones

Distribución	Soporte	Peso/densidad	Esperanza
$Geometrica(p)$	$i \in \{1, 2, 3, ..\}$	$p(1-p)^{i-1}$	$\frac{1}{p}$
$Binomial(n, p)$	$i \in \{1, 2, .., n\}$	$\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	np
$Exponencial(\lambda)$	$x \geq 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$
$Poisson(\lambda)$	$k \in \{0, 1, 2, ..\}$	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ
$Gamma(n, \lambda)$	$x \geq 0$	$\frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$	$\frac{n}{\lambda}$