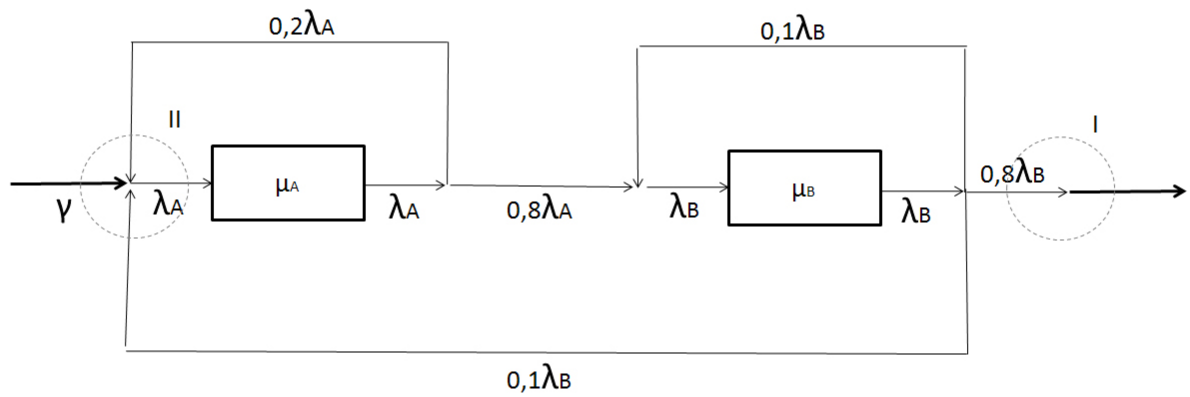
IN3702: Investigación de Operaciones
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: S. Astroza, N. Inostroza, F. Muñoz, LF. Solari

Pauta Examen

Martes 7 de Diciembre de 2010

Problema 1

a) `(2.0 puntos)` Primero encontraremos las tasas efectivas de cada proceso, para ello consideraremos el siguiente esquema:



Realizando una conservación de flujo en `I`:

$$0,8\lambda_B = \gamma$$

Luego

$$\lambda_B = \frac{5}{4}\gamma$$

Ahora realizamos conservación de flujo en `II`:

$$\gamma + 0,2\lambda_A + 0,1\lambda_B = \lambda_A$$

Lo que implica que

$$\lambda_A = \frac{9}{8}\lambda_B = \frac{45}{32}\gamma$$

Para determinar la condición de estabilidad del problema imponemos condición de estacionariedad en ambas etapas ($\rho < 1$).

$$\rho_A < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda_A}{\mu_A} < 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma < \frac{32}{45}\mu_A$$

$$\rho_B < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda_B}{\mu_B} < 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma < \frac{4}{5}\mu_B$$

La tasa máxima de alimentación del sistema será la condición más restrictiva de las dos anteriores, es decir:

$$\gamma_{max} = \text{mín}\left\{\frac{32}{45}\mu_A, \frac{4}{5}\mu_B\right\} = \text{mín}\left\{\frac{32}{45}\cdot 20, \frac{4}{5}\cdot 10\right\} = 8 \ [unidades/hora]$$

b) `(2.0 puntos)` De la parte anterior sabemos que

$$\gamma_{max} = \text{mín}\left\{\frac{32}{45}\mu_A, \frac{4}{5}\mu_B\right\}$$

Utilizando que $mu_A + \mu_B = 30$

$$\gamma_{max} = \text{mín}\left\{\frac{32}{45}\mu_A, \frac{4}{5}(50 - \mu_A)\right\}$$

Es fácil ver que lo anterior es equivalente a:

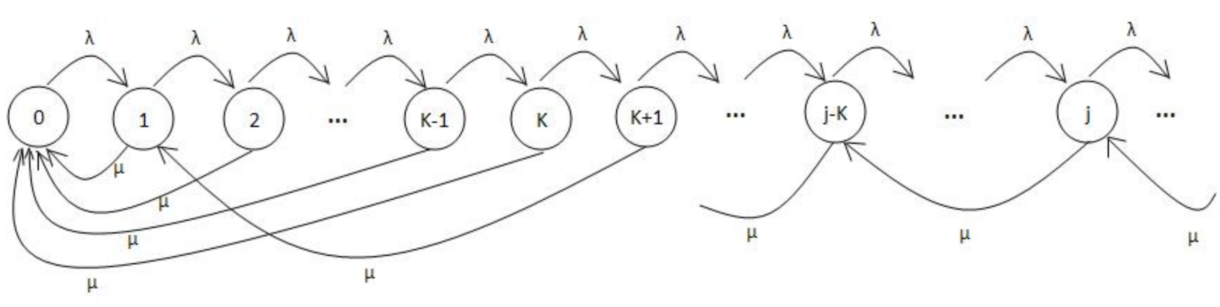
$$\gamma_{max}(\mu_A) = \begin{cases} \frac{32}{45}\mu_A & \text{si } \mu_A \in (0, \frac{270}{17}) \\ \\ \frac{120}{5} - \frac{4}{5}\mu_A & \text{si } \mu_A \in (\frac{270}{17}, 30) \end{cases}$$

El balance debe hacerse justamente en $\mu_A = \frac{270}{17} = 15,9 \ \ [unid/hora]$ obteniéndose $\gamma_A = \frac{192}{17} = 11,3 \ \ [unid/hora]$.

c) `(2.0 puntos)` Se modela nuevamente el sistema pero sin el reflujo de A sobre si mismo. Se vuelve a calcular la tasa máxima, la cual nuevamente se ve restringida por el proceso B. Luego la tasa máxima es la misma de la parte a) y la diposición a pagar es nula.

Problema 2

a) `(1.5 puntos)` La cadena luce más o menos así:



La tasa de transición del estado i al $i+1$ es $\lambda \ \forall i$, del estado i al 0 es $\mu \ \forall i \leq K$ y la tasa de transición del estado $i+K$ al estado i es $\mu \ \forall i > K$. Notar también que la cadena es infinita.

La condición para estado estacionario la obtenemos de imponer que la tasa de entrada sea igual a la tasa de salida efectiva:

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \cdot \mu \cdot min(k, K) \\ \frac{\lambda}{K \cdot \mu} &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \cdot min(\frac{k}{K}, 1) \\ &< \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Luego la condición de estabilidad es que $\lambda < \mu K$.

b) `(1.5 puntos)` Utilizamos el principio de igualdad de tasas en todos los estados:

- <u>`Estado 0:`</u>

$$\lambda \pi_0 = \sum_{k=1}^{K} \mu \pi_k$$

- <u>`Estado k:`</u> En general (para $k \neq 0$)

$$(\mu + \lambda)\pi_k = \lambda \pi_{k-1} + \mu \pi_{k+K}$$

Agregando la ecuación $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$ se completa el sistema de ecuaciones que permitiría calcular los π_k.

c) `(1.5 puntos)`

El número esperado de cajas en bodega viene dado por:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} k \pi_k$$

Para el tiempo promedio de una caja en la bodega usamos Little:

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

d) `(1.5 puntos)` El dueño de la bodega gana en promedio $C \cdot L$ $\$/ut$ por almacenar las cajas y debe pagar $\pi_0 \cdot \mu$ $\$/ut$ debido al hecho que a veces llegar el camión y encuentra la bodega vacía. Para que la bodega se financie debe cumplirse:

$$C \cdot L > \pi_0 \cdot \mu$$

Problema 3

a) `(2.0 puntos)`

- <u>`Etapas:`</u>
  k : cada uno de los N días ($k = 1, \ldots, N$).

- <u>`Variable de decisión:`</u>
  x_k : ciudad que opera en el día k.
- <u>`Variable de estado:`</u>
  s_k : ciudad que operó en el día $k-1$.
- <u>`Naturaleza de las variables:`</u>
  $s_k, x_k \in \{1,2\}$
- <u>`Recursividad:`</u>
  $s_{k+1} = x_k$
- <u>`Función de beneficios:`</u>

$$V_k(s_k, x_k) = r_k^{x_k} - c\,|s_k - x_k| + V_{k+1}^*(x_k)$$

$$V_{k+1}^*(s) = \text{máx}\,\{V_{k+1}(s,1), V_{k+1}(s,2)\}$$

- <u>`Condición de borde:`</u>
  $V_{N+1}^*(\%) = 0$

b) `(2.0 puntos)` El taxista va a querer cambiar de ciudad cuando la diferencia en términos de beneficio entre cambiarse y quedarse sea mayor al costo de hacer el cambio, es decir:

$$\begin{aligned} V_k(i,\bar{i}) - V_k(i,i) &\geq 0 \\ r_k^{\bar{i}} - c + V_{k+1}^*(\bar{i}) - (r_k^i + V_{k+1}^*(i)) &\geq 0 \\ r_k^{\bar{i}} - r_k^i - c + V_{k+1}^*(\bar{i}) - V_{k+1}^*(i) &\geq 0 \end{aligned}$$

En el peor de los casos al taxista le convendrá volver a la ciudad i en la etapa siguiente, es decir: $V_{k+1}^*(\bar{i}) - V_{k+1}^*(i) = -c$. Luego la condición se transforma en $r_k^{\bar{i}} - r_k^i \geq 2c$.
Para el caso en que el taxista decide quedarse, debe cumplirse que:

$$\begin{aligned} V_k(i,i) - V_k(i,\bar{i}) &\geq 0 \\ r_k^i - r_k^{\bar{i}} + c + V_{k+1}^*(i) - V_{k+1}^*(\bar{i})) &\geq 0 \end{aligned}$$

Nuevamente en el peor de los casos le convendrá cambiarse de ciudad en la etapa siguiente, es decir: $V_{k+1}^*(i) - V_{k+1}^*(\bar{i}) = -c$. La condición se transforma en $r_k^{\bar{i}} - r_k^i \leq 0$.

c) `(2.0 puntos)` En este caso el problema se formula muy parecido a la parte a), pero cambia la función de beneficios

- <u>`Función de beneficios:`</u>

$$\begin{aligned} V_k(s_k, x_k) &= p_{x_k}\left[\beta_{x_k} r_k^{x_k} - c\,|s_k - x_k| + V_{k+1}^*(x_k)\right] + (1 - p_{x_k})\left[r_k^{x_k} - c\,|s_k - x_k| + V_{k+1}^*(x_k)\right] \\ &= (1 - p_{x_k} + p_{x_k}\beta_{x_k}) r_k^{x_k} - c\,|s_k - x_k| + V_{k+1}^*(x_k) \end{aligned}$$