Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: G. Cuevas, J. Gacitua, R. Szederkenyi

Resumen Procesos de Poisson

1. **Distribuciones Útiles.**
   - $X \rightarrow Poisson(\lambda) \Rightarrow P[X=k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$; $k \in N \cup \{0\}$
   - $X \rightarrow \exp(\lambda) \Rightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; $x \geq 0$
   - $X \rightarrow Bin(n,p) \Rightarrow P[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$; $k \in N \cup \{0\}$
   - $X \rightarrow Gamma(\alpha,\beta) \Rightarrow f_X(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}$; $x > 0$
     Donde $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ cuando $\alpha \in N$
   - $X \rightarrow U(a,b) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{b-a}$; $a \leq x \leq b$

2. **Ley de Probabilidades.**

   Si $N(t)$ es un PPH (Proceso de Piosson Homogéneo) de tasa λ, entonces $N(t)$ tiene una distribución de Poisson de parámetro $\lambda \cdot t$:

   $$P[N(t)=k] = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \; ; k \in N \cup \{0\}$$

   Ej: La llegada de autos a un estacionamiento se puede representar como un PPH de tasa $\lambda \left[\frac{autos}{hora}\right]$. ¿Cuál es la probabilidad de que en las primeras 10 horas lleguen 20 autos?

   $$P[N(10)=20] = \frac{(10\lambda)^{20} e^{-10\lambda}}{20!}$$

3. **Incrementos Estacionarios.**

   La probabilidad de ocurrencia de eventos en un intervalo de tiempo depende sólo del tamaño del intervalo.

   Ej. (continuación): ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen 5 autos entre las 6 y las 8?

   $$P[\text{5 autos entre 6 y 8}] = P[N(2)=5] = \frac{(2\lambda)^5 e^{-2\lambda}}{5!}$$

4. **Incrementos Independientes.**

   Los eventos ocurridos en intervalos **disjuntos** de tiempo, son independientes entre sí.

   Ej. (continuación): ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen 3 autos entre las 5 y las 6, dado que llegaron 2 autos entre las 3 y las 4?

   $$P[\text{3 autos entre 5 y 6}/\text{2 autos entre 3 y 4}] = P[\text{3 autos entre 5 y 6}] = P[N(1)=3] = \frac{(1\lambda)^3 e^{-1\lambda}}{3!}$$

5. **Tiempos Entre Eventos Consecutivos.**

   Si $N(t)$ es un PPH de tasa λ, entonces los tiempos entre eventos consecutivos se ditribuyen de forma **exponencial** de parámetro λ.

6. **Tiempos de Ocurrencia del *n*-ésimo Evento.**

   El tiempo que demora en ocurrir el n-ésimo evento de un PPH de tasa λ, se ditribuye en forma de $Gamma(n,\lambda)$.

   El tiempo de ocurrencia del n-ésimo evento es la suma de n v.a. exponenciales. Es sabido que la distribución de la suma de n exponenciales de tasa λ, distribuye con $Gamma(n,\lambda)$.

7. **Distribución Condicional de Tiempos de Ocurrencia.**

   Dado que un evento ocurrió en el intervalo $[t_1, t_2]$, el instante de ocurrencia se distribuye mediante $U(t_1, t_2)$

   Ej. (continuación): Si se sabe que un auto entró entre las 6 y las 9, ¿Cuál es la probabilidad de que haya llegado antes de las 8?

$$P[\text{antes de las } 8/\text{llegó entre 6 y 9}] = P[U(6,9) \leq 8] = \int_6^8 \frac{1}{9-6} dt = \frac{8-6}{9-6} = \frac{2}{3}$$

   Dado que n eventos ocurrieron en el intervalo $[t_1, t_2]$ y no se conoce el orden (secuencia) de ocurrencia, entonces los instantes de ocurrencia son v.a. *iid* $U(t_1, t_2)$.

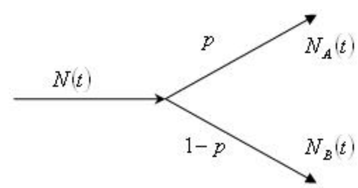
8. **División de Procesos de Poisson.**

   Sea $N(t)$ es un PPH de tasa λ. Si los eventos de $N(t)$ son tipo A con probabilidad p y tipo B con probabilidad $(1-p)$, entonces:

$$N_A(t): \text{N}^{\text{o}} \text{ eventos tipo } A \text{ ocurridos hasta } t.$$

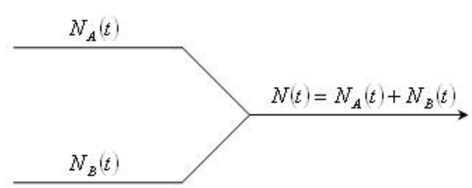
$$N_B(t): \text{N}^{\text{o}} \text{ eventos tipo } B \text{ ocurridos hasta } t.$$

   Son PPH de tasas $\lambda \cdot p$ y $\lambda \cdot (1-p)$ respectivamente y son independientes entre sí.



9. **Unión de Procesos de Poisson Indapendientes.**

   Sean $N_A(t)$ y $N_B(t)$ PPH independientes de tasas λ_A y λ_B respectivamente. Entonces, el proceso $N(t) = N_A(t) + N_B(t)$ es un PPH de tasa $(\lambda_A + \lambda_B)$.



10. **Propiedad Útil.**

    Sea $N(t)$ un PPH de tasa λ. Sea S_n el tiempo de ocurrencia del n-ésimo evento de $N(t)$, entonces:

$$P[S_n \leq t] = P[N(t) \geq n]$$

Dudas y/o errores:
Gabriel Cuevas R.
gcuevas@gmail.com