



Pauta CTP N°3

Martes 5 de Octubre de 2010

- a) (1.2 puntos) El proceso de llegada de clientes $\{N(t), t \geq 0\}$ es un PPH, luego la probabilidad de que el tiempo de la primera llegada X_1 sea menor a 2 (duración del primer turno) es:

$$P(X_1 \leq 2) = 1 - e^{-\lambda 2} = 1 - e^{-60}$$

La probabilidad de que el cajero del quinto turno¹ atienda a más de 60 clientes es:

$$P(N(2) > 60) = \sum_{j=61}^{\infty} P(N(2) = j) = \sum_{j=61}^{\infty} \frac{(2\lambda)^j e^{-2\lambda}}{j!} = \sum_{j=61}^{\infty} \frac{60^j e^{-60}}{j!}$$

- b) (1.2 puntos) El número esperado de clientes que atenderá el cajero del cuarto turno no depende de cuantos clientes haya atendido el cajero del tercer turno porque son intervalos de tiempo disjuntos. Como la esperanza de la Poisson es idéntica al parámetro:

$$E(N(2)) = 2 \cdot \lambda = 60$$

Como todos los turnos tienen la misma duración se tiene que el número esperado de clientes es idéntico para cada uno de ellos, luego:

$$E(\text{clientes atendidos día}) = 15 + 7 \cdot E(N(2)) = 435$$

- c) (1.2 puntos) Si sabemos que una persona llegó dentro del día, el instante de su llegada se distribuye uniforme entre las 8:00 y las 24:00. Como cada turno tiene la misma duración, la probabilidad de que la persona haya llegado en un turno determinado es $1/8$. Con esto se tiene que:

$$P[N(2) = 50 / N(16) = 500] = \frac{500!}{450!50!} \left(\frac{1}{8}\right)^{50} \left(\frac{7}{8}\right)^{450}$$

- d) (1.2 puntos) Llamaremos $N_c(t)$ al proceso de llega al local de la competencia. Luego:

$$\begin{aligned} P[N(2) + N_c(3) = k] &= \sum_{l=0}^k P[N(2) + N_c(3) = k / N_c(3) = l] P[N_c(3) = l] \\ &= \sum_{l=0}^k P[N(2) = k - l] P[N_c(3) = l] \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{(2\lambda)^{k-l} e^{-2\lambda}}{(k-l)!} \cdot \frac{(3\mu)^l e^{-3\mu}}{l!} \\ &= \frac{e^{-(2\lambda+3\mu)}}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (2\lambda)^{k-l} (3\mu)^l \\ &= \frac{e^{-(2\lambda+3\mu)}}{k!} (2\lambda + 3\mu)^k = \frac{e^{-186}}{k!} 186^k \end{aligned}$$

¹Lo único importante respecto al turno es el largo del intervalo del tiempo, pues los procesos de Poisson tienen incrementos estacionarios.

- e) (1.2 puntos) Calculamos la esperanzas de las ventas perdidas condicionado al tiempo que dure la atención y luego calcular lo que nos piden. Si T_a es el tiempo que dura la reparación en horas:

$$E[\text{N de ventas perdidas} / T_a = t] = \lambda \cdot t$$

Luego

$$\Rightarrow E[\text{N de ventas perdidas}] = \int_0^{16} \lambda \cdot t \cdot \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T} \cdot t} dt = \lambda \cdot \int_0^{16} \frac{1}{T} \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{T} \cdot t} dt$$

Notar que el límite superior de la integral es por la hora de cierre del local (permanece abierto sólo 16 horas durante el día).

- f) BONUS (0.5 puntos) Viendo el valor de la compra como un proceso de llegadas en batch (la esperanza del monto de compro total corresponde a la esperanza de llegadas multiplicada por el valor esperado de compra) y las llegadas de clientes compradores de promoción como un proceso de Poisson filtrado, se debe buscar el tiempo t que maximize:

$$\max_t \sum_{i=1}^8 f_i(t) \lambda p \left(\frac{850 + 2150}{2} - c_i \right) - (2 - f_i(t)) \lambda p 500 + \lambda(1 - p) \left(\frac{950 + 3150}{2} - C \right)$$

con

$$f_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si el turno } i \text{ es antes de } t \\ 2 & \text{si el turno } i \text{ es después de } t \\ 2i - t & \text{si } t \text{ es en el turno } i \end{cases}$$