

Pauta Auxiliar 6: Procesos de Poisson

Martes 5 de Octubre de 2010

Problema 1

- a) Llamemos $N(t)$ al proceso de llegada de ambulancias, con $t = 0$ las 8:00 y al tiempo lo medimos en horas. Lo que debemos calcular es $P(N(14) - N(10) = k)$. Hay (al menos) dos maneras de hacer esto de acuerdo a lo estudiado en el curso.

Primera solución

Aplicamos la propiedad que nos dice que los incrementos de un proceso de Poisson no homogéneo se distribuyen como una variable aleatoria Poisson con el parámetro apropiado.

Específicamente, si llamamos $\lambda(t)$ a la función de intensidad del proceso $N(t)$, la variable aleatoria $N(14) - N(10)$ tiene distribución Poisson de parámetro

$$\Lambda = \int_{10}^{14} \lambda(s) ds = 14.$$

Por lo tanto,

$$P(N(14) - N(10) = k) = \frac{e^{-14} 14^k}{k!}.$$

Segunda solución

Otra alternativa es considerar que el proceso de llegada es homogéneo entre las 18:00 y las 20:00 y entre las 20:00 y las 22:00. Con esta idea, dividimos el cálculo en dos intervalos independientes (son disjuntos y el proceso es de Poisson) y condicionamos en el número de llegadas en el primer intervalo:

$$\begin{aligned} P(N(14) - N(10) = k) &= \sum_{l=0}^k P(N(14) - N(12) = k - l | N(12) - N(10) = l) P(N(12) - N(10) = l) \\ &= \sum_{l=0}^k P(N(14) - N(12) = k - l) P(N(12) - N(10) = l) \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{e^{-8} 8^{k-l}}{(k-l)!} \frac{e^{-6} 6^l}{l!} \\ &= \frac{e^{-14}}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} 8^{k-l} 6^l \\ &= \frac{e^{-14}}{k!} (8 + 6)^k \\ &= \frac{e^{-14} 14^k}{k!} \end{aligned}$$

b) Debemos calcular la probabilidad

$$\begin{aligned}
 P(\text{1 llegada en h. diurno} | \text{hubo 1 llegada}) &= \frac{P(\text{"hubo 1 llegada" y "llegada en h. diurno"})}{P(\text{"hubo 1 llegada"})} \\
 &= \frac{P(\text{"1 llegada en h. diurno" y "sin llegadas en h. nocturno"})}{P(\text{"hubo 1 llegada"})} \\
 &= \frac{P(N(12) = 1 \text{ y } N(24) - N(12) = 0)}{P(N(24) = 1)} \\
 &= \frac{36 e^{-36} \cdot e^{-48}}{84 e^{-84}} \\
 &= \frac{3}{7}.
 \end{aligned}$$

Problema 2

Para todas las partes considerar $r = 1 - p - q$

a) El proceso de llegada de grupos $\{N(t), t \geq 0\}$ es un PPH, luego:

$$P(N(12) - N(11) = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

b) Buscamos que el tiempo para la primera llegada X_1 , sea menor o igual a h . Como estamos frente a un PPH,

$$P(X_1 \leq h) = 1 - e^{-\lambda h}$$

c) Sea $\{N_i(t), t \geq 0\}$ PPH que representa el proceso de llegada de grupos de tamaño $i = 1, 2, 3$. Buscamos entonces

$$\begin{aligned}
 P(N_2(1) = 2 \wedge N_1(1) = 0 \wedge N_3(1) = 0) &= P(N_2(1) = 2) \cdot P(N_1(1) = 0) \cdot P(N_3(1) = 0) \\
 &= \frac{(q\lambda)^2 e^{-q\lambda}}{2!} \cdot e^{-(1-q)\lambda} \\
 &= \frac{(q\lambda)^2 e^{-\lambda}}{2!}
 \end{aligned}$$

d) Se pide

$$P(N_1(12) - N_1(10) = 0) = e^{-2p\lambda}$$

e) Existen 3 formas para que se cumpla lo pedido:

- Llegue 1 grupo de una persona, 1 grupo de dos personas y 0 grupos de 3 personas.

$$P_1 = p\lambda e^{-p\lambda} \cdot q\lambda e^{-q\lambda} \cdot e^{-r\lambda} = pq\lambda^2 e^{-\lambda}$$

- Llegue 1 grupo de 3 personas y 0 grupos de otro tamaño.

$$P_2 = r\lambda e^{-r\lambda} e^{-(p+q)\lambda} = r\lambda e^{-\lambda}$$

- Lleguen 3 grupos de 1 persona y 0 grupos de otro tamaño.

$$P_3 = \frac{(p\lambda)^3 e^{-p\lambda}}{3!} e^{-(q+r)\lambda} = \frac{(p\lambda)^3 e^{-\lambda}}{3!}$$

La probabilidad buscada es:

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

- f) Durante las primeras h horas ya sabemos que fueron k helados vendidos, lo único variable es lo que se podría vender desde las h horas hasta las 10 horas de operación, lo cual es independiente del pasado. El valor buscado es entonces:

$$\begin{aligned} E[\text{Ventas} | k \text{ helados en las primeras } h \text{ horas}] &= k + E[N_1(10-h) + 2N_2(10-h) + 3N_3(10-h)] \\ &= k + E[N_1(10-h)] + 2E[N_2(10-h)] + 3E[N_3(10-h)] \\ &= k + \lambda \cdot (p + 2q + 3r) \cdot (10-h) \end{aligned}$$

- g) Condicionamos sobre el tamaño del primer grupo que llega a la heladería al estar desocupada.

$$E[\text{Ventas perdidas}] = \sum_{i=1}^3 E[\text{Ventas perdidas} | \text{Llego grupo de tamaño } i] \cdot P(\text{Llego grupo de tamaño } i)$$

Donde

- $P(\text{Llego grupo de tamaño } 1) = \frac{p\lambda}{p\lambda + q\lambda + r\lambda} = p$
- $P(\text{Llego grupo de tamaño } 2) = \frac{q\lambda}{p\lambda + q\lambda + r\lambda} = q$
- $P(\text{Llego grupo de tamaño } 3) = \frac{r\lambda}{p\lambda + q\lambda + r\lambda} = r$

El término restante se calcula condicionando sobre el tiempo total de atención del heladero. Sea X v.a. que representa el tiempo que tarde el heladero en atender a una persona (X se distribuye $\exp(\mu)$).

Sea

$$\begin{aligned} \theta &= E[\text{Ventas perdidas} | \text{se atiende a 1 persona}] = \int_{x=0}^{\infty} E[N_1(X) + 2N_2(X) + 3N_3(X) | X=x] \cdot f_X(x) dx \\ &= \int_{x=0}^{\infty} E[N_1(X)] \cdot f_X(x) dx + 2 \int_{x=0}^{\infty} E[N_2(X)] \cdot f_X(x) dx + 3 \int_{x=0}^{\infty} E[N_3(X)] \cdot f_X(x) dx \\ &= \int_{x=0}^{\infty} (p\lambda x) \cdot f_X(x) dx + 2 \int_{x=0}^{\infty} (q\lambda x) \cdot f_X(x) dx + 3 \int_{x=0}^{\infty} (r\lambda x) \cdot f_X(x) dx \\ &= \frac{\lambda}{\mu} (p + 2q + 3r) \end{aligned}$$

El tiempo de atención por persona es independiente el uno del otro y el proceso de llegada de clientes es poissoniano, luego para un grupo de i personas, se perderán $i\theta$ clientes en términos esperados. Finalmente:

$$E[\text{Ventas perdidas}] = p\theta + 2q\theta + 3r\theta = \frac{\lambda}{\mu} (p + 2q + 3r)^2$$

Problema 3

Notación:

$N_A(t)$: N de contenedores de la empresa A que han llegado hasta t (PPH de tasa λ_A)

$N_O(t)$: N de contenedores de otros clientes que han llegado hasta t (PPH de tasa λ_O)

$N(t)$: N de contenedores que han llegado hasta t (PPH de tasa $\lambda = \lambda_A + \lambda_O$)

$S_O(n)$: Instante de llegada del n -ésimo contenedor que no es de A ($Gamma(n, \lambda_O)$)

- a) Claramente el número de contenedores de la empresa A , dado que han llegado n contenedores en total, sigue una distribución Binomial de parámetros n y $\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_O}$ (que corresponde a la probabilidad de que un contenedor de la empresa A llegue antes que un contenedor de otro cliente). Entonces:

$$p_k(n) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_O} \right)^k \cdot \left(\frac{\lambda_O}{\lambda_A + \lambda_O} \right)^{n-k}$$

- b) Se distinguen dos casos para m

Caso 1: $m \leq N$

En este caso todos los contenedores pueden ser de la empresa A o no. Luego $q_k(m) = p_k(m)$ $0 \leq k \leq m$

Caso 2: $m > N$

Ahora por lo menos $m - N$ contenedores pertenecen a la empresa A y el resto debe calcularse utilizando los resultados de la parte anterior. Luego

$$q_k(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq k < m - N \\ \binom{m}{k} \cdot \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_O} \right)^k \cdot \left(\frac{\lambda_O}{\lambda_A + \lambda_O} \right)^{m-k} & \text{si } m - N \leq k < m \end{cases}$$

- c) Se distinguen dos casos para m

Caso 1: $m \leq N$

$$P(\text{despachar } m) = P(N(3) = m) = \frac{(3\lambda)^m \cdot e^{-3\lambda}}{m!}$$

Caso 2: $m > N$

$$\begin{aligned} P(\text{despachar } m) &= \sum_{k=0}^{N-1} P(N_A(3) = m - k \wedge N_O(3) = k) + P(N_A(3) = m - N \wedge N_O(3) \geq N) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(3\lambda_A)^{m-k} \cdot e^{-3\lambda_A}}{(m-k)!} \cdot \frac{(3\lambda_O)^k \cdot e^{-3\lambda_O}}{k!} + \frac{(3\lambda_A)^{m-N} \cdot e^{-3\lambda_A}}{(m-N)!} \cdot \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(3\lambda_O)^k \cdot e^{-3\lambda_O}}{k!} \end{aligned}$$

- d) Hay que calcular el beneficio y los costos por embarque. El beneficio entre embarques depende del número de contenedores despachados. Luego:

$$E[B] = \sum_{m=0}^{\infty} E[B|m \text{ despachados}] \cdot P(\text{despachar } m)$$

Se debe condicionar en el número de contenedores de la empresa A .

$$E[B|m \text{ despachados}] = \sum_{k=0}^{\infty} E[B|k \text{ empresa } A|m] \cdot q_k(m)$$

Finalmente

$$E[B|k \text{ empresa } A|m] = B_A \cdot k + B_O \cdot (m - k)$$

Para calcular los costos, consideremos que dado que un cliente cualquier (que no es la empresa A) llegó entre embarques, debe condicionarse en el instante t de la llegada. Si llega en t , el tiempo que ha transcurrido desde el último embarque será obviamente t . El cliente se perderá si ya han llegado N o más clientes distintos de A a la bodega en el instante en que llega. Con esto, la probabilidad de perder a dicho cliente será:

$$P(\text{perder cliente} | \text{llego en } t) = P(S_O(N) < t) = \int_0^t \frac{\lambda_O^N \cdot t^{N-1} \cdot e^{-\lambda_O t}}{(N-1)!} dt$$

Dado que llegó entre embarques, se tiene que:

$$P(\text{perder cliente}) = \int_0^3 P(\text{perder cliente} | \text{llego en } t) \cdot \frac{1}{3} dt$$

Finalmente, la utilidad diaria esperada será:

$$E[U] = E[B] - C \cdot E[\text{clientes perdidos}]$$

Para calcular el número esperado de clientes perdidos, basta con considerar el proceso de filtrado de llegadas de contenedores que no son de A y que se perderán. Luego:

$$E[\text{clientes perdidos}] = P(\text{perder cliente}) \cdot \lambda_O \cdot 3$$

Otra forma es condicionar en el número de llegadas de clientes entre embarques, obteniendo una distribución binomial. Luego:

$$\begin{aligned} E[\text{clientes perdidos}] &= \sum_{k=0}^{\infty} E[\text{clientes perdidos} | n] \cdot P(N_O(3) = n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} n \cdot P(\text{perder cliente}) \cdot P(N_O(3) = n) \\ &= P(\text{perder cliente}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} n \cdot P(N_O(3) = n) \\ &= P(\text{perder cliente}) \cdot \lambda_O \cdot 3 \end{aligned}$$