

Solución CTP 1

Martes 24 de Agosto de 2010

- (a) (1,5 puntos) ¿Cuál es el ingreso esperado en el período 3? (suponga p_k conocidos)

$$\begin{aligned} E[U_3|N_2 = n] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_3 \cdot P[N_3 = i|N_2 = n] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_3 \cdot \frac{[n \cdot e^{-p_3}]^i \cdot e^{-[n \cdot e^{-p_3}]}}{i!} \\ &= [n \cdot e^{-p_3}] \cdot p_3 \end{aligned}$$

- (b) (1,5 puntos) ¿Cuál es el ingreso esperado en el período 1? (suponga p_k conocidos)

$$E[U_1|N_2 = n] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_1 \cdot P[N_1 = k|N_2 = n]$$

Al calcular la probabilidad condicional, queda:

$$\begin{aligned} P[N_1 = k|N_2 = n] &= \frac{P[N_2 = n|N_1 = k] \cdot P[N_1 = k]}{P[N_2 = n]} \\ &= \frac{P[N_2 = n|N_1 = k] \cdot P[N_1 = k]}{\sum_{i=0}^{\infty} P[N_2 = n|N_1 = i] \cdot P[N_1 = i]} \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} P[N_1 = k] &= \frac{(\lambda \cdot e^{-p_1})^k \cdot e^{-\lambda \cdot e^{-p_1}}}{k!} \\ P[N_2 = n|N_1 = k] &= \frac{(k \cdot e^{-p_2})^n \cdot e^{-k \cdot e^{-p_2}}}{n!} \end{aligned}$$

Luego,

$$P[N_1 = k|N_2 = n] = \frac{\frac{(k \cdot e^{-p_2})^n \cdot e^{-k \cdot e^{-p_2}}}{n!} \cdot \frac{(\lambda \cdot e^{-p_1})^k \cdot e^{-\lambda \cdot e^{-p_1}}}{k!}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i \cdot e^{-p_2})^n \cdot e^{-i \cdot e^{-p_2}}}{n!} \cdot \frac{(\lambda \cdot e^{-p_1})^i \cdot e^{-\lambda \cdot e^{-p_1}}}{i!}}$$

- (c) (1,5 puntos) Si en el penúltimo período la cantidad de productos vendidos es μ ¿Cuál es el precio óptimo del último período?

De la parte (a) se obtiene,

$$E[U_F|N_{F-1} = \mu] = [n \cdot e^{-p_F}] \cdot p_F$$

Para maximizar se deriva e iguala a cero

$$\begin{aligned} \frac{d[\lambda \cdot e^{-p_F}]}{dp_F} &= 0 \\ \lambda(e^{-p_F} - e^{-p_F} p_F) &= 0 \\ 1 - p_F &= 0 \\ p_F &= 1 \end{aligned}$$

Además se verificará la que segunda derivada sea negativa:

$$\begin{aligned} \frac{d[\lambda(e^{-p_F} - e^{-p_F} p_F)]}{dp_F} &= \lambda(-e^{-p_F} + e^{-p_F} - e^{-p_F} p_F) \\ &= \lambda \cdot (-e^{-p_F} p_F) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

- (d) (1,5 puntos) ¿Cuáles son los precios óptimos p_3 y p_4 si se quiere optimizar el ingreso en un horizonte de 2 semanas?

$$\begin{aligned}
 E[U_3 + U_4] &= E[U_3 + U_4 | N_3 = i] P[N_3 = i] \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} [i \cdot p_3 + \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot p_4 \cdot \frac{(i \cdot e^{-p_4})^j \cdot e^{-[i \cdot e^{-p_4}]}}{j!}] \frac{(n \cdot e^{-p_3})^i \cdot e^{-n \cdot e^{-p_3}}}{i!} \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} [i \cdot p_3 + i \cdot e^{-p_4} \cdot p_4] \cdot \frac{(n \cdot e^{-p_3})^i \cdot e^{-n \cdot e^{-p_3}}}{i!} \\
 &= [\lambda \cdot e^{-p_3}] \cdot [p_3 + e^{-p_4} \cdot p_4]
 \end{aligned}$$

Por la parte anterior se ve que si queda un período, independiente de la tasa se debe cobrar \$1, luego la expresión queda:

$$E[U_3 + U_4] = [\lambda \cdot e^{-p_3}] \cdot [p_3 + e^{-1}]$$

Para encontrar el precio, se deriva y se iguala a cero:

$$\begin{aligned}
 \frac{d[\lambda \cdot e^{-p_3}] \cdot [p_3 + e^{-1}]}{dp_3} &= 0 \\
 \lambda \cdot e^{-p_3} [1 - e^{-1} - p_3] &= 0 \\
 \Rightarrow p_3 &= 1 - e^{-1}
 \end{aligned}$$

Además, se ve la segunda derivada:

$$\begin{aligned}
 \frac{d[\lambda \cdot e^{-p_3} [1 - e^{-1} - p_3]]}{dp_3} &= -\lambda \cdot e^{p_3} [1 - e^{-1} - p_3 + 1] \\
 &= -\lambda \cdot e^{e^{-1}-1} \\
 &\leq 0
 \end{aligned}$$