Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Teoría de Colas

Denis Sauré V.
Julio, 2003.

1. Problemas de Teoría de Colas

1. Los clientes de un banco llegan a una de sus sucursales según un proceso de Poisson de Tasa λ [Clientes/hora]. Dentro de la sucursal los clientes pueden dirigirse a las Cajas, ir a realizar consultas en el Mesón de atención de Público o realizar un pago/depósito rápido en la Caja Buzón. En Primera instancia un cliente se dirige a las Cajas con probabilidad P_1, al Mesón de Atención de Público con probabilidad P_2 y a la Caja Buzón con probabilidad P_3. Luego de ser atendido en Cajas una fracción p de clientes se dirige al Mesón de Atención de Público (El resto se retira de la sucursal). Posterior a pasar por la caja Buzón una fracción q de los clientes se dirige al Mesón de Atención de Público (El resto se retira de la Sucursal). Luego de ser atendidos en el Mesón de Atención de Público una fracción r de los clientes van a las Cajas Buzón y el resto se retiran de la sucursal. En las Cajas hay 3 cajeros y cada uno de ellos demora un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu_1$ [horas] en atender a un cliente.

   En la Caja Buzón, el cliente debe llenar un sobre con la información de su pago/depósito e introducirlo en la Caja Buzón. cada cliente demora un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu_3$ [horas] en realizar este trámite. En el Mesón de Atención de Público hay 2 personas cada una de las cuales demora un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu_2$ [horas] en atender a un cliente.

   a) Modele el Sistema descrito como un Sistema de Colas, Calcule W, L, L_q, L_s, W_q, W_s para la sucursal, para el Mesón de Atención de Público, para las Cajas y para la Caja Buzón.

   El gerente de la Sucursal desea descongestionarla por lo que ha decidido establecer un fono 800 para aquellos clientes con trámites no urgentes. Este nuevo sistema cuenta con 4 líneas y los clientes pueden realizar, por sí solos, todas las transacciones que requieran. Cada cliente demora un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu_4$ [horas] en realizar sus trámites a través de este nuevo sistema. Si un cliente llama y encuentra las líneas ocupadas decide posponer sus trámites para otro día. El Gerente estima que una fracción s de los clientes que en estos momentos llegan a la sucursal durante el día usarían este sistema.

   b) Modele el nuevo sistema y calcule los nuevos indicadores para cada subsistema (W, L, L_q, L_s, W_q, W_s).

   c) Cuando la sucursal abre sus puertas a las 9 de la mañana se encuentra vacía. ¿Son válidos los indicadores obtenidos durante el tiempo inmediatamente posterior a la apertura?. ¿Por qué?.

2. (*) Considere la siguiente estación de pago de peaje y estudie su comportamiento en estado estacionario. Vehículos llegan según un proceso de Poisson de tasa r vehículos por hora. Cada vehículo independientemente es ruteado con probabilidad $1/2$ a la caseta 1 y con probabilidad $1/2$ a la 2. Cada caseta consiste en un servidor automático FIFO con tiempos de atención iid exponenciales de media $1/\mu_1$. Lamentablemente, el servidor se hecha a perder con probabilidad p, con lo cual el vehículo debe volver a colocarse en la cola correspondiente. Al salir de cualquiera de las casetas, los autos se rutean a la pista 1 y los camiones a la pista 2. En el proceso original de llegada, un vehículo es un camión con probabilidad q y un auto con probabilidad $1-q$. La entrada de los autos (camiones) a las pistas se modelan como colas con tiempos de atención exponenciales iid de medias $1/\mu_a$ ($1/\mu_c$).

   a) Modele el sistema anteriormente descrito como una red de colas.

   b) Calcule las tasas efectivas de entrada y determine las condiciones de estado estacionario. Discuta cuáles procesos de entrada son Poisson y cuáles son independientes unos de otros.

   c) Encuentre la distribución de probabilidades estacionarias del número de camiones a la entrada de la respectiva pista.

   d) Calcule el número promedio de autos en su respectiva pista.

   e) ¿Cuánto tiempo pasa un auto dentro del sistema?. ¿Y un camión?.

3. (*) Fruta llega a una línea de desembarque en cajas de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa l (cajas/hr). En el sistema 1, 2 operarios se encargan de abrir las cajas y de revisar superficialmente el estado de la fruta y si detecta que la fruta está muy deteriorada la aparta para devolución. El tiempo que demora un operario en abrir y revisar la caja se distribuye exponencialmente con tasa m_1 (cajas/hr), además se observa que una fracción p de las cajas son separadas para devolución. Una vez abiertas y revisadas, las cajas pasan al sistema 2, donde un operario se encarga de poner toda la fruta en correas transportadoras, demorándose un tiempo exponencialmente distribuido de media m_2. Además una fracción q de las cajas vienen mal abiertas por lo que se devuelven al sistema anterior. Finalmente la fruta en la correa transportadora pasa al sistema 3 en donde un operario se encarga de limpiar y revisar cada fruta individualmente para asegurar su calidad. El tiempo que demora se distribuye exponencialmente con media m_3 (frutas/hora) y se ha observado que una fracción r de la fruta está en mal estado y es separada para su devolución. Además el número de frutas por caja es una variable aleatoria con la siguiente ley de probabilidades

N° fruta por caja	Probabilidad
9	0.1
10	0.2
11	0.3
12	0.3
13	0.1

   a) Número promedio de fruta que es separada para devolución

   b) Número promedio de cajas en sistema 1 y sistema 2. Número promedio de frutas en sistema 3. ¿Cuál es el tiempo promedio de permanencia por fruta en el sistema?.

   c) Si existe un costo de c (\$/hr) asociado a la permanencia de cada fruta en la línea de desembarque ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por aumentar en un 10 % todas las tasas de atención?.

4. Un servicio que provee información geográfica y climatológica a través de internet recibe una demanda descrita por un proceso de Poisson de tasa λ. Cada usuario que ingresa al sistema es atendido por un único servidor el cual determina si la información requerida es geográfica (lo que sucede con probabilidad p_1), climatológica (lo que sucede con probabilidad p_2) o si el servidor no es el adecuado para atender al usuario, en cuyo caso el usuario sale del sistema. Esta operación demora un tiempo exponencialmente distribuido de media $1\backslash\mu_1$. Si un usuario que llega encuentra al servidor ocupado, se coloca en cola.

   Un usuario que requiere información geográfica, pasa a una segunda etapa, en que un único servidor realiza las atenciones, las que demoran un tiempo exponencialmente distribuido de media $1\backslash\mu_2$. De la misma manera, un usuario que requiere información climatológica, pasa a otro servidor, el que demora un tiempo exponencialmente distribuido de media $1\backslash\mu_3$ en atender una consulta. Si un usuario que llega encuentra cualquiera de estos servidores ocupado, se coloca en la cola correspondiente.

   Un usuario que realizó una consulta geográfica, con probabilidad q, además, requiere consultar acerca del clima y pasa al servidor climatológico, después de terminar su atención . Análogamente, un usuario que realizó una consulta climatológica, con probabilidad r, además, requiere una consulta geográfica, por lo que al finalizar ésta pasa al servidor geográfico. Ningún usuario realiza más de dos consultas. Luego de realizar su(s) consulta(s), los usuarios salen del sistema.

   a) Modele el servicio anteriormente descrito como una red de colas. Calcule las tasas efectivas de entrada a cada sistema y escriba las condiciones de estado estacionario.

   b) Calcule el número promedio de usuarios dentro del sistema completo en estado estacionario.

   c) Calcule el tiempo promedio que pasa un usuario dentro del sistema en estado estacionario.

d) Suponga que el servidor percibe un costo por hacer esperar a los clientes, el cual es igual a C_w por unidad de tiempo que está un cliente dentro del sistema. Además, existen costos por unidad de tiempo $C_i(\mu_i)$ asociados a brindar tasas de atención μ_1, μ_2 y μ_3, respectivamente. Formule un problema de optimización que permita encontrar las tasas óptimas de atención, que minimicen el costo total por unidad de tiempo en el estado estacionario.

5. Las personas que llegan a la sala de urgencias de una clínica lo hacen según un proceso de Poisson de tasa λ. Una vez en la sala las personas esperan para ser examinados por cualquiera de los 2 médicos con que cuenta el servicio de emergencia de la clínica. La atención de cada persona por los médicos demora un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de tasa μ_1 .

   Una persona que es examinada por primera vez es enviada con probabilidad p a realizarse exámenes y con probabilidad $1 - p$ es dada de alta. La infraestructura de la sala de exámenes permite tomar exámenes a una persona a la vez, los que demoran un tiempo aleatorio distribuidos según una exponencial de tasa μ_2.

   Después de realizarse los exámenes, las personas se dirigen nuevamente a la sala de urgencia para ser atendidos por los médicos. Una vez terminada esta atención siempre son dados de alta. El servicio funciona continuamente e interesa estudiar su comportamiento en estado estacionario.

   a) Modele el sistema anteriormente descrito como una red de colas. Calcule las tasas efectivas e indique las condiciones para que se alcance estado estacionario.

   b) Calcule el número promedio de pacientes en cada sistema individual y en el sistema total.

   c) ¿Cuál es el valor esperado del tiempo que pasará un cliente que llega, dentro del sistema?, ¿Cuánto tendrá que esperar en promedio un paciente, para ser atendido por primera vez por los médicos?, ¿Cuánto tiempo estará dentro del sistema un paciente que necesita exámenes?.

6. Existe una línea de producción que consiste en dos estaciones de atención, colocadas en serie. Las piezas llegan a la primera estación según un proceso de Poisson de tasa λ [piezas/hora]. Ahí son tratadas por una sola máquina, cuyos tiempos de atención son v.a. exponencialmente distribuidas. La disciplina de atención es FIFO y si una pieza llega a la estación y encuentra al servidor ocupado, entonces espera en cola hasta ser atendida. La capacidad del área de espera es muy muy grande.

   Una vez que una pieza termina de atenderse en la primera estación pasa de inmediato a la siguiente. Nuevamente existe una sola máquina que realiza un proceso sobre las piezas, que demora un tiempo exponencialmente distribuido. También, la disciplina de atención es FIFO y la capacidad del área de espera es muy muy grande. Al terminar su atención en la segunda estación, la pieza sale de ésta terminada.

   a) Modele la línea de producción recién descrita como un sistema de colas (dibuje un diagrama que lo represente).

   b) Si las tasas de atención en las estaciones 1 y 2 son μ_1 y μ_2 [piezas/hora] respectivamente, ¿cuál es el valor esperado del tiempo total que pasa una pieza en la línea de producción (desde que llega a la primera estación hasta que sale de la segunda)?.

   Suponga que se dispone de una potencia eléctrica total P que debe asignar a las máquinas servidoras de cada una de las estaciones. Ahora, las tasas de atención μ_1 y μ_2 son directamente proporcional a la potencia asignada, con constante de proporcionalidad igual a uno. Es decir, si se asignan potencias p_1 y p_2 a las máquinas 1 y 2 respectivamente, entonces las tasas de atención serán $\mu_1 = p_1$ y $\mu_2 = p_2$, en que $p_1 + p_2 = P$. Suponga que $P > 2\lambda$.

   c) Si el objetivo es minimizar el valor esperado del tiempo total que pasa una pieza en la línea de producción, formule (y no resuelva) el problema de optimización que debe resolverse para decidir cuánta potencia asignar a cada uno de los dos servidores. Recuerde las condiciones de estado estacionario.

d) Asuma que existe una solución óptima del problema anterior en el espacio factible de soluciones, de forma que las restricciones de desigualdad estricta no serán activas, por lo cual pueden ser omitidas al resolver el problema de optimización. Resuélvalo y encuentre las potencias óptimas y en consecuencia las tasas de atención óptimas asignadas a cada servidor.

e) Entregue alguna intuición del resultado obtenido. ¿Le parece un resultado esperable?. ¿Por qué?. Comente.

7. La sociedad de inversiones "Ranco Inversiones S.A."(RISA) recibe propuestas respecto de posibles proyectos en los cuales invertir. Estas propuestas se pueden clasificar en 2 tipos: "proyectos inmobiliarios" (PI) y "otros proyectos" (OP). Ambos tipos de propuestas llegan a RISA de acuerdo a procesos de Poisson de tasas λ_I y λ_O [proyectos/mes] respectivamente.

   Cuando llega una propuesta de proyecto debe ser evaluada por un analista financiero de RISA. Los PI son evaluados por Alejandro, quien demora un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu_I$ [meses] en evaluar un proyecto cualquiera. Los PO son evaluados ya sea por Benjamín o Cristina (trabajan juntos), y cualquiera de ellos demora un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu_O$ [meses] en evaluar un proyecto cualquiera.

   Benjamín y Cristina rechazan el 70 % de los proyectos que evalúan y aprueban el resto. Alejandro rechaza el 60 % de los proyectos que evalúa, aprueba el 20 % y el 20 % restante se los envía a Benjamín y Cristina, pues considera que no son puramente inmobiliarios.

   Cuando un proyecto es aprobado, es asignado inmediatamente a un jefe de proyecto, quien se encarga de su administración y ejecución. Si bien en RISA hay sólo K jefes de proyecto de planta, pueden contratarse otros externos por el tiempo que sea necesario. La ejecución de un proyecto cualquiera toma un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\gamma$ [meses].

   a) Modele a RISA como un sistema de colas, indicando el modelo que usará para cada estación y los parámetros asociados.

   b) Indique cómo calcular el tiempo promedio que pasa un proyecto en RISA (desde que llega la propuesta hasta que es rechazado o bien hasta que termina su ejecución).

   c) Suponga que los jefe de proyecto externos cobran C [\$/mes]. Indique cómo calcular el gasto promedio mensual de RISA en jefes de proyecto externos. Para ello suponga que un proyecto que comienza a ser ejecutado por un jefe de proyectos externo será transferido a uno de planta apenas alguno de ellos se desocupe.

   d) Suponga que Alejandro decide que no admitirá más de 5 proyectos pendientes sobre su escritorio, y que pasado ese límite cualquier proyecto que llegue lo transferirá directamente a Benjamín y Cristina. Con este cambio, ¿puede modelar a RISA como un sistema de espera?

8. La oficina de colocaciones de una financiera recibe solicitudes de créditos de acuerdo a un proceso Poisson de tasa λ [solicitudes/hora]. Las solicitudes son pre-evaluadas por un asistente de analista, proceso que toma un lapso de tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu_1$ [horas]. Como resultado de su pre-evaluación el asistente puede decidir aprobar la solicitud o bien traspasarla a la analista de finanzas, para que ella la estudie y decida. La probabilidad de que una solicitud cualquiera sea transferida a la analista es p. La analista demora un lapso exponencialmente distribuido con media $1/\mu_2$ [horas] en estudiar una solicitud cualquiera. Su decisión puede ser aprobación o rechazo de la solicitud, y se sabe que rechaza una fracción R de las que recibe.

   Una vez que una solicitud es aprobada (ya sea por el asistente o la analista) se deben cumplir una serie de procedimientos administrativos los que terminarán con la emisión de un documento de pago en favor del cliente que solicitó el crédito. Estos trámites toman un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu_3$ [horas], y son realizados por cualquiera de 2 ejecutivos designados para ello, cada uno de los cuales puede atender una solicitud a la vez.

a) Modele la oficina descrita como un sistema de colas. ¿Qué relaciones deben satisfacer λ, μ_1, μ_2, μ_3, p y R para que el sistema alcance régimen estacionario?.

b) En promedio, ¿Cuánto tiempo pasa en el sistema una solicitud cualquiera?.

c) ¿Qué fracción de las solicitudes que resultan aprobadas han sido estudiadas por la analista?.

d) Sólo para las solicitudes que son aprobadas: ¿Cuánto tiempo pasa, en promedio, desde que se recibe la solicitud hasta se emite el documento de pago en favor del cliente?.

e) Suponga que la oficina en cuestión puede contratar más ejecutivos (además de los 2 ya existentes) para la tramitación de préstamos ya aprobados por el asistente o la analista. El objetivo de contratar más ejecutivos es reducir el valor del indicador de desempeño calculado en la parte (d). Entregue una cota superior (lo más pequeña posible) para la disminución que se puede lograr (por esta vía) en dicho indicador.

9. Un ex-alumno de cierta Universidad se encuentra en Japón con motivo del Campeonato Mundial de Fútbol. Precisamente en estos momentos y luego de ver el partido Argentina-Inglaterra, entra a un café del centro de Tokio. Dentro del local, existe un mesón en el cual se sirve el café. Éste es atendido por dos amables Geishas, cualquiera de las cuales demora un tiempo exponencialmente distribuido de tasa μ_1 en realizar una atención. Además se sabe que la llegada de personas al establecimiento, sigue un proceso Poissoniano de parámetro λ(clientes/hora).

Luego de conversar con el dueño, el alumno se entera que éste quiere modificar su tradicional local para convertirlo en un moderno cyber-café. Para lograr lo anterior acondicionará una Sala de Terminales, en la que instalará K computadores. Una vez que los clientes terminen de ser atendidos en el mesón, pasarán (y suponga que todos lo harán) a la sala de terminales. Cada computador puede ser utilizado por una y sólo una persona que lo usará un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu_2$. Una vez que el cliente termina de usar la máquina, se retira del café.

Si un cliente llega a la sala de terminales y observa que están todos los computadores ocupados, con una probabilidad q se retirará indignado del local. En caso contrario, volverá al primer mesón para tomarse otro café para poder después probar suerte nuevamente con los computadores.

a) El dueño ha estimado que con una cantidad K de computadores y las mismas dos señoritas, el local estará capacitado para dar un buen servicio. Según él: “La tasa de entrada al local no cambia, por lo tanto con las mismas dos señoritas se debería mantener un nivel de servicio razonable en el mesón del cafe”. El estudiante, después de meditar un segundo, le dice: “Con ese diseño, el sistema colapsará: la cola frente al mesón de café crecerá indefinidamente”. Sin embargo Ud. puede evitar el colapso aumentando ya sea el número de señoritas o el de computadores. ¿Puede ocurrir el problema planteado por el estudiante?. De ser así, las soluciones que él postula ¿Resuelven el problema?. Para ello modele el cyber-café como un sistema de colas (tenga cuidado, no realice más cálculos de los estrictamente necesarios).

b) El alumno convence al dueño que tiene razón y éste le solicita al alumno que le indique cuántas señoritas debe contratar y cuántos computadores comprar, de modo que el local no colapse, pero al mínimo costo posible. Se sabe que el costo de contratar una señorita (con las mismas características de atención anteriormente descritas) es C_S y el costo de un computador es C_C. Formule el modelo que resuelve este problema y explique cómo lo resolvería.

c) El dueño del local pretende que la tasa de pérdida de clientes (aquellos que se retiran del local “indignados” sin haber utilizado el servicio computacional) no sea mayor al 30 % del flujo total de clientes que entra al local. Encuentre una expresión para el número mínimo de computadores que se debe tener para lograr ese objetivo, en términos de los parámetros conocidos. (Suponga que el número de señoritas atendiendo es igual a dos y que se alcanza estado estacionario).

d) Si el número de señoritas es S y el número de computadores es K, calcule el tiempo promedio que demora un cliente cada vez que se sirve un café y el tiempo promedio que está en el sector de los computadores un cliente que consigue entrar en él. ¿Cuál es el tiempo promedio que pasa un cliente dentro del local?, ¿En promedio, cuánta gente hay dentro del local? (Considere que se alcanza estado estacionario).

10. Un policlínico funciona con tres personas: una recepcionista, una enfermera y un médico. Según la dolencia del paciente la recepcionista lo envía al médico o a la enfermera. De todos los pacientes que llegan, una fracción p es derivada a la enfermera, y $(1-p)$ al médico. Después de ser atendidos, los pacientes abandonan el sistema, excepto por el hecho que una fracción q de los pacientes atendidos por la enfermera, deben ser vistos de todos modos por el médico ya que no fueron direccionados correctamente por la recepcionista. La recepcionista, la enfermera y el médico atienden con tasa iguales a μ_1, μ_2, y μ_3 pacientes por hora, respectivamente. Asuma que los pacientes llegan de forma poissoniano de tasa λ.

   a) Calcule las tasas efectivas de llegada a cada una de las entidades del sistema.

   b) ¿Qué condición deben cumplir p y q para que la consulta del médico no se congestione?. Suponga $\lambda > \mu_3$.

11. Un restaurante de comida rápida vende dos platos para llevar: la especialidad de la casa (plato1) y la “fantasía del chef” (plato2). Cada uno de ellos se vende en un mesón independiente.

    Se ha observado que los clientes llegan al local de acuerdo a un proceso Poissoniano de parámetro λ[clientes/hora], y que una fracción p de ellos se dirige al mesón del plato1, donde hay dos operarios que los atienden de manera cortés y eficiente, demorándose un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu_1$, en cada atención.

    El resto de los clientes se dirige al mesón del plato2, donde hay sólo un funcionario para atenderlos, tomando cada atención un tiempo exponencialmente distribuido con tasa μ_2. Además, una fracción q de quienes entraron a comprar el plato1 se tienta con los deliciosos aromas del otro mesón, y, una vez atendidos en el mesón 1 se van al mesón 2 para comprar también el plato2. Recíprocamente, una fracción r de quienes llegaron a comprar el plato2 pasan después a comprar del 1 también. Nadie hace la misma cola más de una vez.

    Finalmente, una vez que han sido atendidos (en uno o ambos mesones) los clientes pasan a pagar a una caja única, tomándole a cada uno un tiempo exponencialmente distribuido con tasa μ_3 efectuar el pago.

    Modele el local como un sistema de colas y calcule las medidas de efectividad.

12. Consideremos el funcionamiento de la única planta de revisión técnica que existe en el pueblo de Combarbalá. Los vehículos llegan por primera vez a la planta de acuerdo a un proceso Poisson de tasa λ vehículos por hora. El sistema demora en revisar un vehículo un tiempo exponencialmente distribuido con tasa μ autos por hora. Un auto que llega por primera vez tiene una probabilidad p_1 de ser rechazado, en cuyo caso debe ir a reparar la falla y retornar a la planta. Un vehículo que llega por segunda vez tiene una probabilidad p_2 ($p_2 < p_1$) de ser rechazado, en cuyo caso debe ir nuevamente a reparar la falla. Finalmente, un vehículo que llega por tercera vez tiene una probabilidad p_3 ($p_3 < p_2$) de ser rechazado en cuyo caso se retiene el permiso de circulación del vehículo quedando inhabilitado para transitar.

    a) Determine una relación entre λ, p_1, p_2, p_3 de tal forma que existan probabilidades estacionarias para el sistema.

    b) Si el precio de cada revisión es C [$] determine los ingresos esperados por unidad de tiempo de la planta y el costo esperado de la revisión para un vehículo. ¿Cuántos autos quedan fuera de circulación por hora ?.

13. (*) Considere un café en el cual atienden dos señoritas, una rubia y una morena. Al llegar los clientes se ubican en una fila única y esperan su atención. Los clientes llegan según un proceso de Poisson de λ clientes por hora. Por otro lado la atención de cada una de las señoritas sigue una distribución exponecial de media $1/\beta$. Según polémicos datos históricos, si ambas "niñas" están desocupadas los clientes siempre prefieren a la rubia. Suponga que en el local hay suficiente espacio para todos los clientes que deseen entrar y ningún cliente se va antes de servirse su café.

   a) Muestre la cadena asociada e indique cuáles son las condiciones de régimen estacionario.

   b) ¿Cuáles son las ecuaciones de consevación de flujo?

   c) ¿Cuál es el largo promedio de clientes en cola?

   d) ¿Indique cuál es la fracción del tiempo que la rubia está desocupada y la fracción del tiempo que la morena lo está.

14. (*) A un centro médico llegan pacientes según un proceso de Poisson de tasa λ_1 para su evaluación médica. Estos son atendidos en una primera etapa por una enfermera la que realiza un chequeo rápido (toma de presión, temperatura y ficha clínica) y les asigna equiprobablemente cuál de los 2 médicos de turno será su médico tratante. Luego de este chequeo la enfermera puede enviarlos a la consulta del médico asignado, lo que ocurre con probabilidad m, o al laboratorio de toma de muestras para que se le realice algún examen.

   El laboratorio es atendido por un único tecnólogo que no puede atender a más de un paciente a la vez. TODOS los pacientes que ingresan al laboratorio por la enfermera deben visitar a los médicos luego de la toma de exámenes.

   Además se sabe que al laboratorio llegan también pacientes según un proceso de Poisson de tasa λ_2, que vienen directamente derivados por otros médicos a realizarse exámenes, de los cuales una fracción q debe ir inmediatamente al control de un médico por tener algún indicador altamente alterado. En estos casos el operador del laboratorio les asigna siempre al primero de los médicos de turno.

   Los pacientes que visitan a los médicos y NO se han realizado exámenes tienen una probabilidad p de ser enviados al laboratorio, luego de lo cual deben volver a la consulta de su médico tratante para una nueva atención. Por otra parte, todos quienes visitan a un médico con exámenes en la mano pueden requerir con probabilidad s la opinión del otro médico de turno para afinar el tratamiento. En estos casos los pacientes se dirigen a la otra consulta médica, esperan ser atendidos y se retiran a su hogar a seguir el tratamiento indicado. Los pacientes que tienen exámenes y no necesitan una segunda opinión son enviados directamente a sus casas.

   Si todas las atenciones duran un tiempo independiente exponencialmente distribuido de tasas μ_i, para la enfermera, μ_e para la toma de muestras y μ_m para la consulta médica (igual para ambos médicos) conteste las siguientes preguntas:

   a) Modele la situación descrita como un sistema de colas y determine las condiciones para que exista estado estacionario.

   b) Si Ud. ingresa directamente a la toma de muestras, ¿Cuál será su tiempo esperado dentro del sistema?.

15. (*) El Departamento de Control de Calidad de una empresa manufacturera recibe productos provenientes de distintas líneas de producción. Éstos son analizados por un inspector de calidad quien identifica qué productos presentan fallas, y los clasifica en buenos, con fallas menores (características estéticas) o con fallas graves. El tiempo que le toma a este empleado inspeccionar los productos se distribuye exponencialmente con media $1/\mu_1$ [horas]. Los productos a inspeccionar llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ [unidades/hora], siendo un 10 % calificados con falla menores y 5 % con fallas graves. Los productos buenos son enviados inmediatamente a la bodega.

Como segundo paso, los productos que presentan fallas deben ser analizados por un laboratorista para identificar las causas de sus defectos. Los productos con fallas menores son analizados por un especialista, quien demora un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu_2$ [horas] en su análisis. Los productos con fallas graves son analizados por uno de los dos ingenieros con que cuenta el departamento, cada uno de los cuales demora un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu_3$ [horas] en revisar un producto.

Por otro lado, el 20 % de los productos analizados por fallas graves son enviados al especialista encargado de revisar las carecterísticas estéticas, por considerar que los defectos que presentan no son realmente graves, sino menores.

Luego de todos los análisis, un producto que presentó fallas es enviado junto con el informe de calidad respectivo, al jefe del departamento de calidad quien demora un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu_4$ [horas] en revisar el informe, luego de lo cual envía el producto a la bodega de productos defectuosos.

a) Modele el sistema de control de calidad de la empresa como un sistema de colas, indicando el modelo que usará para cada estación y los parámetros asociados.

b) ¿Qué relaciones deben satisfacer λ, μ_1, μ_2, μ_3 y μ_4 para que el sistema alcance estado estacionario?.

c) ¿Qué fracción de los productos que llegan al departamento son analizados por el especialista en fallas menores?.

d) En promedio, ¿cuánto tiempo pasa en el sistema un producto que llega al departamento de calidad de la empresa?.

e) Suponga que el inspector decide no admitir más de 50 productos para su revisión, y que pasado ese límite cualquier producto que llegue lo transferirá directamente a los ingenieros especialistas en fallas graves. Con este cambio, ¿puede modelar el sistema de control de calidad con los modelos estudiados en le curso?.

f) Suponga que la empresa quiere disminuir en lo máximo posible el tiempo que demora el departamento en determinar la causa de un defecto en los productos analizados. Para esto, ha decidido contratar más especialistas en atributos. Entregue una cota superior (lo más pequeña posible) para la disminución que se puede lograr.

16. Los alumnos de uno de los postgrados de una escuela de ingeniería se aprestan a rendir su examen de final de su curso favorito, "Procedimientos Escolásticos". El ayudante del ramo recibe los exámenes de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ [exámenes / hora] y los corrige demorándose un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu_1$ [horas] en cada uno. Como resultado de su correción el ayudante puede decidir aprobar al alumno o bien traspasar la evaluación a Saúl Peugeot, flamante profesor del ramo, para que él tome la decisión. La probabilidad de que una evaluación cualquiera sea transferida al profesor es p. El Profesor demora un tiempo distribuido exponencialmente de media $1/\mu_2$ [horas] en estudiar una situación cualquiera. Su decisión puede ser la aprobación o reprobación del alumno, y se sabe que reprueba a una fracción R de las evaluaciones que recibe. En los casos en que se decide reprobar a un alumno, el profesor debe publicar inmediatamente esta situación.

Por otra parte, en el caso que un alumno sea aprobado, ya sea por el ayudante o el profesor, se deben cumplir una serie de procedimientos administrativos (cálculos de promedios y otras cosas varias) los que terminarán con la publicación de la situación final y la respectiva nota del examen. Estos trámites son realizados con mucha dedicación ya sea por Natasha Yenkowitch o Felix Desaire, auxiliares del ramo, demorando un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu_3$ [horas] por cada alumno aprobado.

a) Modele el proceso descrito como un sistema de colas. ¿Qué relaciones deben satisfacer λ, μ_1, μ_2, μ_3, p y R para que se alcance régimen estacionario?.

b) En promedio, ¿Cuánto tiempo debe esperar un alumno desde que entrega su examen hasta ver publicada su situación final?.

c) ¿Qué fracción de los alumnos que resultan aprobados ha sido por decisión del profesor?.

d) Sólo para los alumnos que son aprobados: ¿Cuánto tiempo pasa, en promedio, desde que se recibe el examen hasta que se publican sus notas y situación final?.

e) Suponga que la dirección del postgrado puede contratar más auxiliares para la tramitación y cálculo de notas finales de los alumnos aprobados por el ayudante o el profesor. Entregue una cota superior (lo más pequeña posible) para la disminución que se puede lograr por esta vía en el indicador calculado en la parte anterior.

2. Resolución problemas Teoría de Colas

■ **2.** *a*) El sistema se muestra en la figura 1.

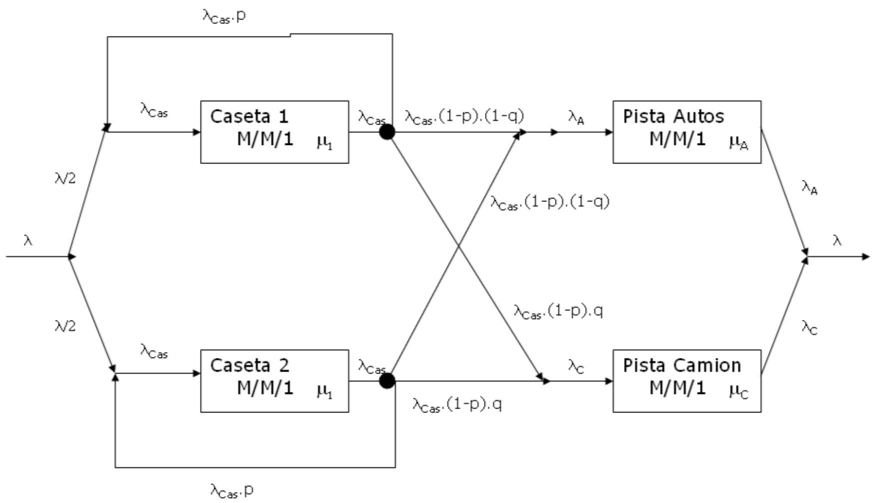

Figura 1: Cola problema 2

b) De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor
Casetas	λ_{Cas}	$\frac{\lambda}{2(1-p)}$
Autos	λ_A	$\lambda(1-q)$
Camiones	λ_C	λq

Respecto a las condiciones de estado estacionario estas son las siguientes:

Sistema	Condición
Casetas	$\frac{\lambda_{Cas}}{\mu_1} < 1$
Geográfico	$\frac{\lambda_A}{\mu_A} < 1$
Climatológico	$\frac{\lambda_C}{2\mu_C} < 1$

c) El número de camiones a la entrada de la pista de camiones es una cola M/M/1 con tasa de llegada λ_C y tasa de atención μ_C , luego utilizando el resultado conocido para colas de este tipo se tiene que:

$$\begin{aligned} \pi_k &= \rho^k \cdot (1-\rho) \\ \pi_0 &= (1-\rho) \\ \rho &= \frac{\lambda_C}{\mu_C} \end{aligned}$$

d) El número promedio de autos en la respectiva pista de obtiene utilizando L de una cola M/M/1:

$$L_A = \frac{\rho_A}{1-\rho_A}$$

donde :

$$\rho_A = \frac{\lambda_A}{\mu_A}$$

e) Un auto dentro del sistema pasa por una de las casetas (que son iguales dada las tasas de atención y las tasas efectivas de entradas) y por la entrada de la pista de autos. Luego:

$$W_A = W_{Cas} + W_{pista}$$

Además se tiene que para un M/M/1 se tiene que:

$$W_{M/M/1} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Sin embargo el número de veces que un auto pasa por una caseta antes de ir a su respectiva pista, es una variables aleatoria de distribución geométrica de parámetro p. Recordando que la esperanza de una geométrica (p) es $\frac{p}{1-p}$ concluimos que:

$$W_{Cas} = \frac{p}{1-p} \cdot W_{M/M/1}$$

Entonces:

$$W_A = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{1}{\mu_1 - \lambda_{Cas}} + \frac{1}{\mu_A - \lambda_A}$$

Análogamente para un camión:

$$W_C = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{1}{\mu_1 - \lambda_{Cas}} + \frac{1}{\mu_C - \lambda_C}$$

■ **3.** *a*) El sistema se muestra en la figura 2.

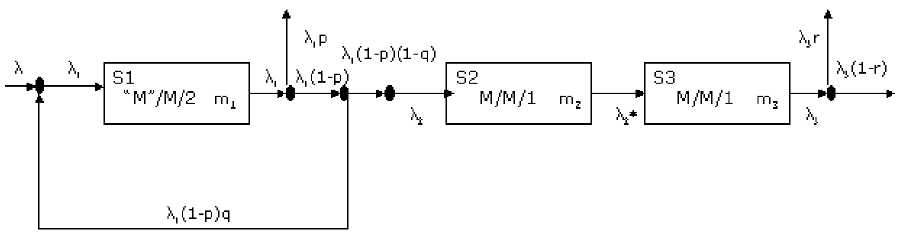

Figura 2: Cola problema 3

De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor
Sistema 1	λ_1	$\frac{\lambda}{1-(1-p)\cdot q}$
Sistema 2	λ_2	$\frac{\lambda\cdot(1-p)\cdot(1-q)}{1-(1-p)\cdot q}$
Sistema	λ_3	$\frac{\lambda\cdot(1-p)\cdot(1-q)}{1-(1-p)\cdot q}\cdot E(N)$

Respecto a las condiciones de estado estacionario estas son las siguientes:

Sistema	Condición
Sistema 1	$\frac{\lambda_1}{2\cdot\mu_1} < 1$
Sistema 2	$\frac{\lambda_2}{\mu_2} < 1$
Sistema 3	$\frac{\lambda_3}{\mu_3} < 1$

Luego el número promedio de fruta que es separado para la devoución es : $\lambda_1 \cdot E(N) + \lambda_3 \cdot r$

b) El número promedio de cajas en los sistemas 1 y 2, corresponde al valor de L para colas M/M/2 y M/M/1 respectivamente, ie:

$$L_1 = \frac{2\rho_1}{1-\rho_1^2}$$

$$L_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2}$$

donde :

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{2\mu_1}$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$$

Del mismo modo para el Sistema 3, se tiene que :

$$L_3 = \frac{\rho_3}{1-\rho_3}$$

donde

$$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3}$$

El tiempo de permamencia de una fruta dentro del sistema se debe calcular, tomando en cuenta todos los casos posibles dados por el reflujo existente en el Sistema 1, se obtiene:

$$W_{total} = \sum_{i=1}^{\text{inf}} i \cdot W_1 \cdot (1-p)^{i-1} \cdot q^{i-1} \cdot p + \sum_{i=1}^{\text{inf}} (i \cdot W_1 + W_2 + W_3) \cdot (1-p)^i \cdot q^{i-1} \cdot (1-q)$$

donde:

$$W_i = \frac{L_i}{\lambda_i}$$

Usando la fórmula de Little se tiene que :

$$W_{total} = \frac{L_{total}}{\lambda}$$

c) Propuesto!!

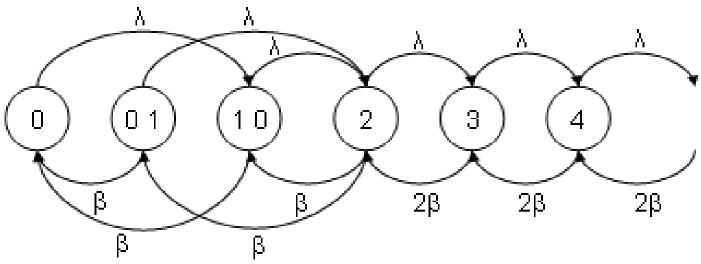

Figura 3: Cola problema 13

■ **13.** *a*) En la siguiente cadena los estados denotados por tuplas, se muestra en la figura 3.
La condición de régimen estacionario es : $\frac{\lambda}{2\beta} < 1$

b) Planteando las ecuaciones de conservación de flujo , se tiene que el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned}
\pi_0 \cdot \lambda &= \pi_{0,1} \cdot \beta + \pi_{1,0} \cdot \beta \\
\pi_{0,1} \cdot (\lambda + \beta) &= \pi_2 \cdot \beta \\
\pi_{1,0} \cdot (\lambda + \beta) &= \pi_0 \cdot \lambda + \pi_2 \cdot \beta \\
\pi_2 \cdot (\lambda + 2\beta) &= \pi_3 \cdot 2\beta + \pi_{1,0} \cdot \lambda + \pi_{0,1} \cdot \lambda \\
\pi_k \cdot (\lambda + 2\beta) &= \pi_{k+1} \cdot 2\beta + \pi_{k-1} \cdot \lambda \quad \forall\, k > 2 \\
\sum \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

c) El largo promedio de clientes en cola es:

$$L_q = \sum_{k}^{\infty} (k-2) \cdot \pi_k$$

d) Fracción del tiempo rubia desocupada : $\pi_{0,1} + \pi_0$
Fracción del tiempo morena desocupada : $\pi_{1,0} + \pi_0$

e) La probabilidad de no hacer cola es : $\pi_0 + \pi_{0,1}\pi_{1,0}$

■ **14.** *a*) El sistema de Colas se muestra en la figura 4.
De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor
Enfermera	λ_{Enf}	λ_1
Médico 1	λ_{M1}	$\lambda_2 q + (1+s) \cdot (\frac{\lambda_1(1+m\cdot p)}{2}) - s\frac{\lambda_1 \cdot m \cdot (1-p)}{2}$
Médico 2	λ_{M2}	$(1+s)(\frac{\lambda_1(1+m\cdot p)}{2}) + s\lambda_2 q - s\frac{\lambda_1 \cdot m \cdot (1-p)}{2}$
Exámenes	λ_{EX}	$\lambda_2 + \lambda_1(1+m(p-1))$

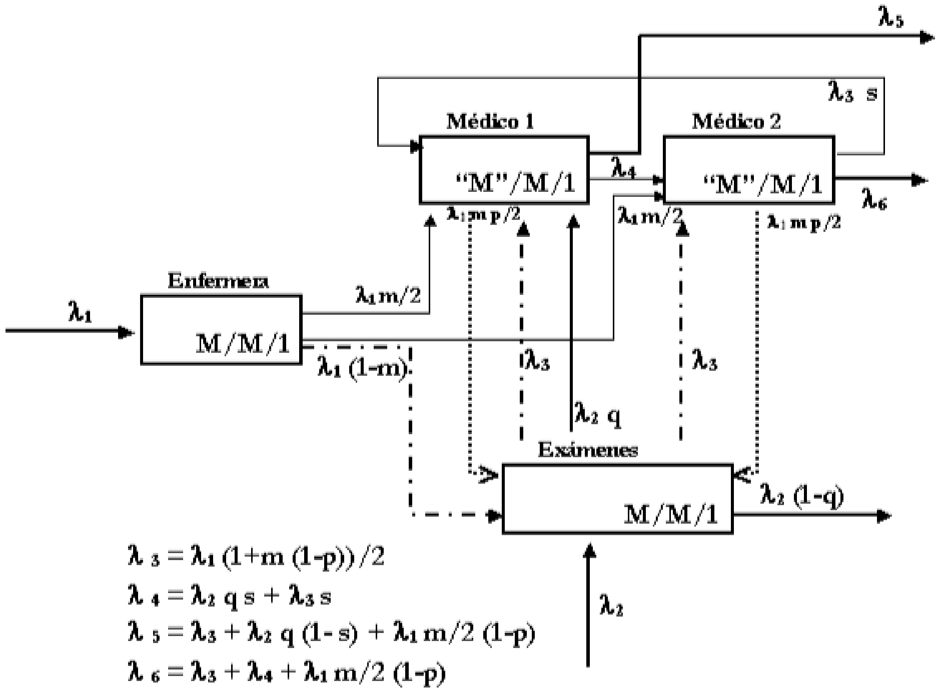

Figura 4: Cola problema 14

Las condiciones de estado estacionario son las siguientes:

Sistema	Condición
Enfermera	$\lambda_{Enf} \leq \mu_e$
Médico 1	$\lambda_{M1} \leq \mu_m$
Médico 2	$\lambda_{M2} \leq \mu_m$
Gerencia estudios	$\lambda_{EX} \leq \mu_e$

b) el tiempo esperado en el caso que se ingresa directamente al laboratorio será:

$$E[\text{Espera}] = E[\text{Laboratorio}] + q \cdot (E[\text{Médico 1}] + s \cdot E[\text{Médico 2}])$$

Utilizando las fórmulas para el tiempo de espera para sistemas M/M/1 se tiene que la expresión toma la siguiente forma:

$$E[\text{Espera}] = \frac{1}{\mu_l - \lambda_{EX}} + q \cdot (\frac{1}{\mu_m - \lambda_{M1}} + s \cdot \frac{1}{\mu_m - \lambda_{M2}})$$

■ **15.** *a*) Sean $p_1 = 10\,\%$, $p_2 = 5\,\%$, $p_3 = 85\,\%$ y $p_4 = 20\,\%$, el sistema se muestra en la figura 5. De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Expresión	Valor
Inspector	λ_{ins}	λ	λ
Especialista	λ_{esp}	$\lambda(p_1 + p_2 \cdot p_4)$	$0.11 \cdot\lambda$
Ingenieros	λ_{ing}	$\lambda \cdot p_2$	$0.05 \cdot\lambda$
Jefe Calidad	λ_{cal}	$\lambda \cdot (p_1 + p_2)$	$0.15 \cdot\lambda$

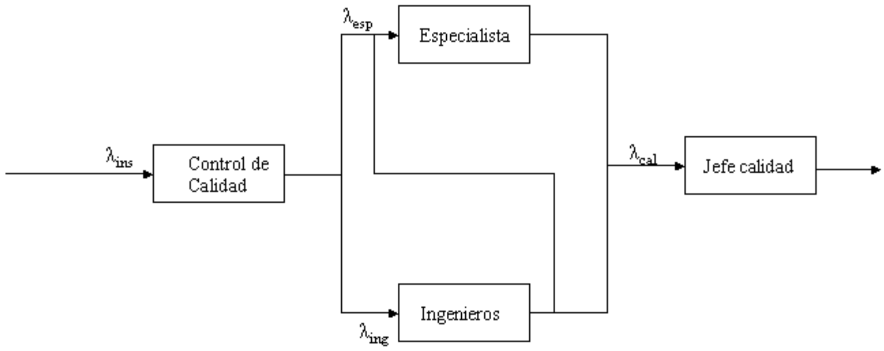

Figura 5: cola problema15

b) Respecto a las condiciones de estado estacionario estas son las siguientes:

Sistema	Condición
Inspector	$\frac{\lambda_{ins}}{\mu_1} < 1$
Especialista	$\frac{\lambda_{esp}}{\mu_2} < 1$
Ingenieros	$\frac{\lambda_{ing}}{2\mu_3} < 1$
Jefe Calidad	$\frac{\lambda_{cal}}{\mu_4} < 1$

c) La fracción de productos que llegan al departamento y que son analizados por el especialista en fallas menores es :

$$\text{Fracción} = \frac{\text{Casos favorales}}{\text{Casos totales}} = \frac{\lambda \cdot (p_1 + p_2 \cdot p_4)}{\lambda} = 11\,\%$$

d) En esta parte hay dos formas posibles de proceder:

Forma 1:
Calculando los largos promedios de cada uno de los subsistemas usando las expresiones conocidas, se obtiene:

Sistema	L_i	ρ_i
Inspector	$\frac{\rho_{ins}}{1-\rho_{ins}}$	$\frac{\lambda_{ins}}{\mu_1}$
Especialista	$\frac{\rho_{esp}}{1-\rho_{esp}}$	$\frac{\lambda_{esp}}{\mu_2}$
Ingenieros	$\frac{2\cdot\rho_{ing}}{1-\rho_{ing}^2}$	$\frac{\lambda_{ing}}{2\mu_3}$
Jefe Calidad	$\frac{\rho_{cal}}{1-\rho_{cal}}$	$\frac{\lambda_{cal}}{\mu_4}$

Luego:

$$L_{total} = L_{ins} + L_{esp} + Ling + L_{cal}$$

Finalmente usando la frmula de Little, se obtiene:

$$W_{total} = \frac{L_{total}}{\lambda}$$

Forma 2:
Calculando los tiempos de permanencia promedio en cada subsistema como:

$$W_i = \frac{L_i}{\lambda_i}$$

donde λ_i representa la tasa efectiva de entrada al sistema i, el tiempo de permanacia en el sistema total se puede obtener de la siguiente forma:

$$W_{total} = W_{ins} + W_{esp} \cdot (p_1 + p_2 \cdot p_4) + W_{ing} \cdot p_2 + W_{cal} \cdot (p_1 + p_2)$$

e) Bajo estas condiciones el subsistema del Inspector se transforma de una cola M/M/1 a una M/M/1/50. Con esto las salidas de este sistema y, por lo tanto, la entrada a los subsiguientes deja de ser poissoniana y el sistema no se podría estudiar con este tipo de modelo, a no ser que las tasas de entrada y atención sean tales que nunca se alcance la capacidad máxima del sistema.

f) Si se agrega un número ilimitado de especialistas ese susbistema de transforma en una cola M/M/∞, en la cual el número de productos en el sistema tiene una distribución de Poisson de media $L = \frac{\lambda_{esp}}{\mu_2}$. El tiempo promedio que permanece un producto en este subsistema es $\frac{1}{\mu_2}$, ya que al existir capacidad ilimitada en la atención no se forma cola y el tiempo en el sistema es igual al tiempo de atención.

Con lo anterior es posible calcular un nuevo W_{total_2} de las mismas dos formas posibles mostradas en la parte 4 y se puede cuantificar la disminución del tiempo en el sistema como :

$$\delta = W_{total} - W_{total_2}$$

donde W_{total} es el calculado en la parte 4.