INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Richard Weber, Rodrigo Wolf

Auxiliares: Victor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 9
11 de Noviembre, 2010

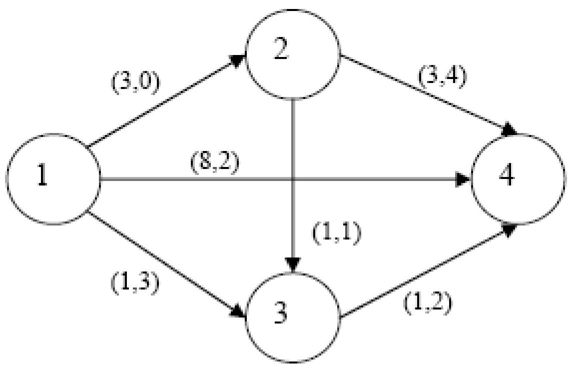
Problema 1

a) Considere un juego en el que en cada jugada se pueden obtener 0, 2 o 3 puntos. Suponga que un jugador ha completado 11 puntos, queremos saber cuál es la mínima cantidad de jugadas en la que el jugador podría haber obtenido su puntaje. Modele el problema como un problema de camino más corto. Explique detalladamente qué representan los nodos y los arcos de la red, así como los costos de los arcos.

b) Modifique el algoritmo Dijkstra (one to all) para que entregue las distancias mínimas desde todos los nodos a uno en particular (all to one).

c) Sea un grafo G(N,A), en el cual se definen 2 parámetros para cada arco en A, (c_{ij}, b_{ij}) que corresponden al costo y al gasto de cierto recurso (piense en gasolina, por ej.) al ir de i a j, respectivamente. Suponga que se dispone de R unidades del recurso y se desea encontrar la ruta de mínimo costo entre el nodo 1 y n, sin agotar el recurso. Modele la siguiente instancia como un problema de flujo en redes, para ello defina un grafo apropiado y especifique nodos, arcos y costos.

R=4 y G es:



Problema 2 (PPL Examen recuperativo 2010/1)

Usted acaba de recibir su examen recuperativo del IN3701, ante lo cuál decide optimizar el tiempo, modelando un problema de programación lineal.

Usted sabe que el examen tiene I preguntas, cada una de las cuales cuenta con J partes para resolver. Mientras más tiempo le dedique a cada una de las partes, mejor será su nota. Suponga que por cada minuto $t \in T$ que usted le dedica a la parte $j \in J$ de la pregunta $i \in I$, logra resolver (correctamente) una fracción A^1_{ijt} del problema, hasta que resuelve la mitad de la parte. Para resolver la segunda mitad, usted puede resolver una fracción A^2_{ijt} por minuto, con $A^1_{ijt}>A^2_{ijt}$ (puede suponer que ambas fracciones son decreciente en el tiempo, dado factores de cansancio y otros).

Suponga que sus auxiliares favoritos pasarán cada 30 minutos, K veces, respondiendo preguntas y dando hints. En cada una de estas ocasiones, usted puede decidir no prestar atención y seguir resolviendo normalmente, o bien parar completamente de resolver y escuchar el hint que van a dar. Si usted decide escuchar el hint $k \in K$, perderá W_k minutos, pero podrá resolver a una fracción $TASA_k$ cualquiera de las partes de las preguntas por un lapso de M_k minutos.

A usted no le gusta dejar preguntas en blanco, por lo que le asignará al menos a cada pregunta Tmin minutos de su tiempo. Por otro lado, existen algunos temas del curso que definitivamente no le agradan. Suponga que el parámetro G_{ij} vale 1 si la materia evaluada en la pregunta i parte j le gusta, y cero sino. Si a usted no le gusta la parte de la pregunta, le dedicará no más de Tmax minutos.

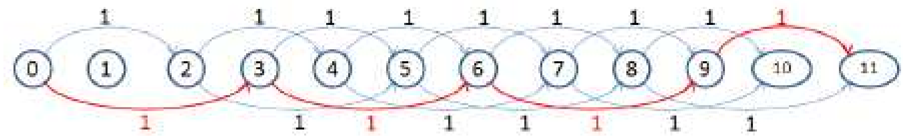
Por último, considere que cuando quedan 10 minutos para entregar el examen, usted entra en un estado de "inspiración divina", donde podrá responder una fracción $5*A^1_{ijt}$ por minuto cualquier pregunta(s) que tengan menos del 25% desarrollado.

Plantee un modelo de programación lineal entera, que le permita decidir cuántos minutos asignarle a cada parte de cada pregunta, y en qué momento, de modo de maximizar el puntaje obtenido. Considere que cada una de las partes tiene un máximo de P_{ij} puntos y que el examen dura |T|=180 minutos.

Solución

Problema 1:

a) Considere una red con nodos que van del 0 al 11, que corresponden a los puntajes obtenidos por el jugador. Los arcos de la red tienen costo igual a 1 y corresponden a una jugada factible, por lo que desde cada nodo i (excepto 1) salen dos arcos, uno que avanza dos nodos (2 puntos) y uno que avanza tres nodos (3 puntos). La red considerada se expone a continuación:



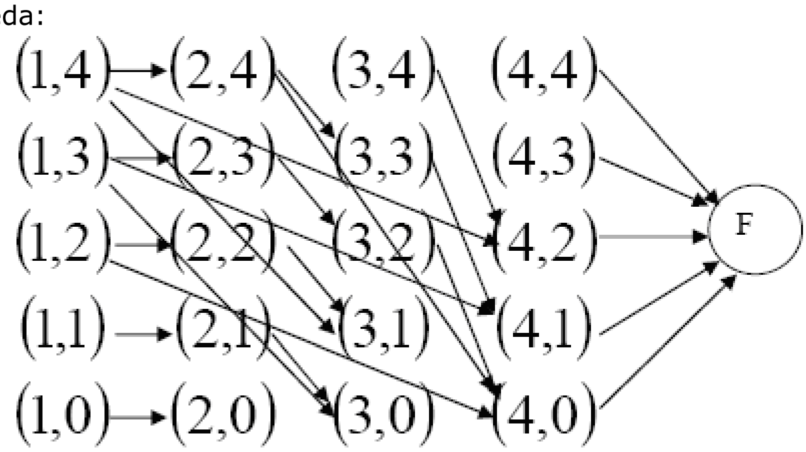
Se observa que la solución de la ruta más corta corresponde precisamente a las 4 jugadas que son el mínimo necesario para alcanzar los 11 puntos requeridos.
Nota: En el grafo de arriba falta poner en todos los nodos un arco que va de cada nodo a sí mismo (equivalente a obtener cero puntos), con costo 1 cada uno.

b) Queremos encontrar la ruta mínima desde cualquier nodo i al nodo n, luego basta con comenzar el algoritmo desde n y revisar los arcos hacia atrás, de la misma forma que el algoritmo original. Noten que en la prueba tendrían que reescribir el algoritmo, pues eso era lo que se pedía. El algoritmo queda igual que en los apuntes, pero tienen que poner que el punto inicial es el nodo n e inicializar desde ahí.

c) Definimos un nuevo grafo G'(N',A'), donde:

- $N' = \{(n,r)/n\in N',\ r\in\{0,1,...,R\}\}\cup\{F\}$, es decir, el par (n,r) nos indica en qué nodo estamos parados en el grafo original, y cuántas unidades de recursos nos quedan). El nodo F es un nodo artificial que se agrega a este problema (después se explica).
- $A'=\{((n_1,r_1),(n_2,r_2))/(n_1,n_2)\in A \wedge r_1-b_{n1,n2}=r_2\}\cup$ $\{((N,r),F), r\in\{0,1,...,R\}\}\cup\{F\}$.
- $c'((n1,r1),(n2,r2))=c(n1,n2)$, $c'((N,r),F)=0$

El grafo queda:



Ahora se puede resolver este nuevo grafo, partiendo desde el nodo (1,4), con Dijkstra por ejemplo, para encontrar las rutas mínimas. Si revisamos la distancia desde (1,4) hasta (F), encontraremos el camino óptimo en el problema original.

Cabe destacar que no es necesario dibujar todos los nodos de arriba, pues hay varios que no son factibles dados nuestra definición de N′ y A′ (por ejemplo, nunca estaremos en (1,3), (1,2), etc.). Estos fueron dibujados sólo por si ayudan a visualizar la definición. En estricto rigor, sólo basta con los nodos que sí se ajustan al problema original.

Notar que si no se agrega el nodo artificial F, habría que correr dijksra y luego ver cuál de los nodos (4,r) tiene el menor costo para decidir cuál es el camino mínimo. Al agregar el nodo F y los arcos de costo cero desde todos los nodos (4,r) a F, estamos eliminando ese "problema", pues ahora basta con mirar el costo de F para saber cuál de los nodos (4,r) tenía el costo mínimo.

Por último, nos pedían modelar el problema como un problema de flujo en redes, por lo que en realidad hablar de usar dijkstra no era válido como respuesta para esta pregunta. El modelo en cuestión es el típico:

$$\underset{s.a.}{Min} \sum_{(i,j)\in A'} x_{ij} c'_{ij}$$

$$\sum_{j\in O(i)} x_{ij} - \sum_{j\in D(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & si\ i=(1,4) \\ -1 & si\ i=F \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j)\in A'$$

Problema 2:

Variables de decisión:

$$T^1_{ijt} = \begin{cases} 1 & \text{Si uso el minuto t en la parte j de la pregunta i (primera mitad)} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$T^2_{ijt} = \begin{cases} 1 & \text{Si uso el minuto t en la parte j de la pregunta i (segunda mitad)} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$R_{ijt} = \begin{cases} 1 & \text{Si uso el minuto t en la parte j de la pregunta i (con hint del aux)} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$S_{ijt} = \begin{cases} 1 & \text{Si uso el minuto t en la parte j de la pregunta i (durante inspiración divina)} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Y_k = \begin{cases} 1 & \text{Si escucho el hint k} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{Si la pregunta i tiene menos del 25\% desarrollado en minuto 170} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Restricciones:

1) Naturaleza de las variables:

$$T^1_{ijt}, T^2_{ijt}, R_{ijt}, S_{ijt}, Y_k\ , Z_{ij} \in \{0,1\}$$

2) Sólo 1 de las variables de tiempo vale 1 en un minuto particular:

$$\sum_{i,j} T^1_{ijt} + T^2_{ijt} + R_{ijt} + S_{ijt} \leq 1 \qquad\qquad \forall t$$

3) Resolver primera mitad:

$$\sum_{t} T^1_{ijt} * A^1_{ijt} \leq 0.5 \qquad\qquad \forall i, j$$

4) Resolver segunda mitad:

$$\sum_{t} T^2_{ijt} * A^2_{ijt} \leq 0.5 \qquad\qquad \forall i, j$$

Nota: Las restricciones 3 y 4 funcionan porque las fracciones A son decrecientes en el tiempo y porque, como estamos maximizando, el solver asignará primero todo lo que pueda del tiempo T^1 antes de usar el tiempo T^2 (es decir, resolverá siempre la primera mitad de una parte antes que la segunda, debido a que $A^1 > A^2$)

5) Pérdida de W_k minutos si escucho el hint k:

$$\sum_{i,j} \sum_{t=30k}^{30k+W_k} T^1_{ijt} + T^2_{ijt} \leq M * (1 - Y_k) \qquad M >> 0, \forall k$$

*Nota: En vez de la M grande se puede poner W_k. También se puede omitir la sumatoria sobre i y j (poniendo para todo i,j en su lugar) y se logra el mismo objetivo. Sin embargo, agregar la sumatoria hace el modelo más eficiente, pues se generan menos restricciones (piensen como quedaría en ZIMPL para verlo, si quitan la sumatoria tienen I*J*K restricciones, mientras que con la sumatoria son sólo K).*

6) Resuelvo a tasa $TASA_k$ si escucho el hint k:

$$\sum_{i,j} \sum_{t=30k+W_k+1}^{(30k+W_k+1)+M_k} R_{ijt} \leq M * Y_k \qquad\qquad M >> 0, \forall k$$

7) Al menos Tmin en todas las preguntas:

$$\sum_{t,j} T^1_{ijt} + T^2_{ijt} + R_{ijt} + S_{ijt} \geq T_{\min} \qquad \forall i$$

8) Máximo Tmax si no me gusta:

$$\sum_{t} T^1_{ijt} + T^2_{ijt} + R_{ijt} + S_{ijt} \leq T_{\max} + M * G_{ij} \qquad M >> 0, \forall i, j$$

9) Definición de Z_i:

$$\sum_j \sum_{t=1}^{170} T_{ijt}^1 * A_{ijt}^1 + T_{ijt}^2 * A_{ijt}^2 + R_{ijt} * TASA_k + S_{ijt} * 5 * A_{ijt}^1 \leq 0{,}25 + M * (1 - Z_i)$$

$$(M >> 0, \forall i)$$

ojo que en el enunciado dice que es el 25% de la pregunta, en la clase (sección 2) definimos esta variable con un índice j, eso no está bien, no es necesario ese índice.

10) iluminación divina:

$$\sum_{t=171}^{180} S_{ijt} \leq 10 * Z_{ij} \qquad \forall i, j$$

11) Condiciones iniciales:

$$S_{ijt} = 0 \qquad \forall i, j, t \leq 170$$
$$R_{ijt} = 0 \qquad \forall i, j, t \notin (30k + w_k + 1, 30k + w_k + 1 + M_k)$$

Nota: Es importante definir que estas variables son cero si no están en los intervalos de tiempo correctos (por ejemplo no puedes gastar minutos en tiempo divino si no estás entre los minutos 171 y 180). Esto porque si no se definen así, el solver podrá asignarles valores 1 en intervalos no correctos (y lo hará, porque por la función objetivo le conviene hacerlo).

Función objetivo:

$$\max\{\sum_{i,j,t} (T_{ijt}^1 * A_{ijt}^1 + T_{ijt}^2 * A_{ijt}^2) * P_{ij} + \sum_{i,j,t,k} (R_{ijt} * TASA_k) * P_{ij} + \sum_{i,j,t} (S_{ijt} * 5 * A_{ijt}^1) * P_{ij}\}$$

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl