INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Richard Weber, Rodrigo Wolf

Auxiliares: Victor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 5
30 de Septiembre, 2010

Problema 1:

Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
&\max x_1 + x_2 \\
&\text{s.a.} \quad -2x_1 + 5x_2 \geq 0 \\
&\qquad\quad x_1 + 4x_2 \leq 16 \\
&\qquad\quad 4x_1 - 3x_2 \leq 7 \\
&\qquad\quad x_1 \geq 0 \\
&\qquad\quad x_2 \, irrestricta
\end{aligned}$$

a. Escriba el Problema en Forma Estándar

b. Grafique el problema. Identifique la región factible, los puntos que podría describir mediante una base, cuántos de estos puntos son factibles y el óptimo del problema. ¿Cuánto vale la Función Objetivo en el óptimo? ¿Qué restricción adicional agregaría al problema original para hacer el problema más sencillo sin cambiar la región factible?

c. ¿Qué particularidad tiene el origen? ¿Qué bases describen este punto? ¿Es alguna infactible? Compruébelo. ¿Tendría sentido que lo fuera? ¿Necesitaría realizar Fase I para resolver el problema? ¿Por qué no?

d. Aplique Simplex partiendo desde el óptimo encontrado en la parte b.

Nota: Para las partes b), c), d) describa o interprete lo que va realizando en forma gráfica.

Problema 2:

a) Dado un problema (P) en forma estándar y *x* un punto extremo para (P) con no todos los costos reducidos $\bar{c} \geq 0$, entonces *x* no es óptimo del problema.

b) Para (P) en forma estándar, toda iteración de simplex mejora estrictamente la función objetivo, o termina con la solución al problema.

c) Explique, utilizando la notación vista en clases, cómo el algoritmo simplex determina:

1. El Óptimo de un problema de optimización.
2. Si una solución es Degenerada.
3. La existencia de Múltiples Óptimos.
4. Si el problema es No Acotado.
5. Solución Factible Inicial.

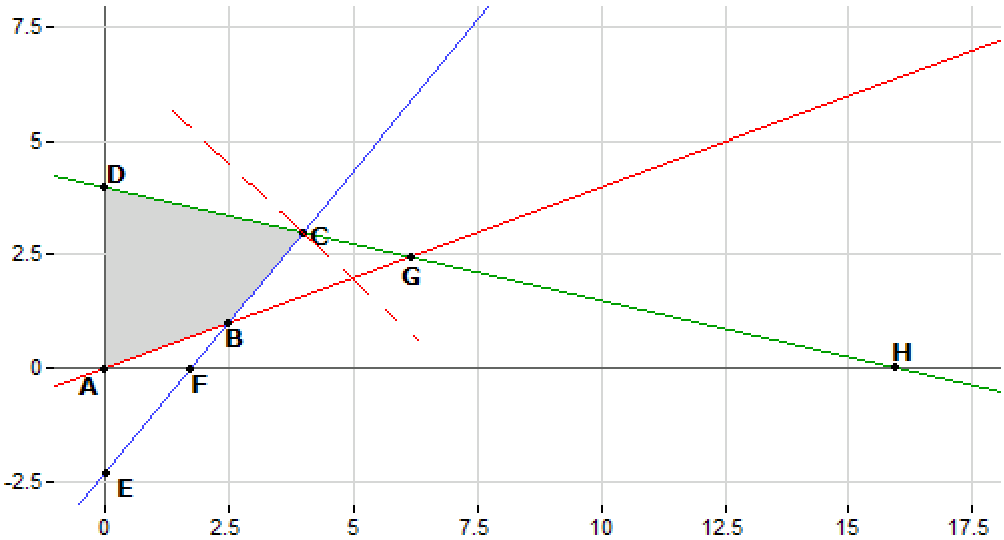
Solución

Problema 1:

a. La forma estándar del problema es:

$$
\begin{aligned}
&\min -x_1 - x'_2 + x''_2 \\
\text{s.a.}\quad & -2x_1 + 5x'_2 - 5x''_2 - x_3 = 0 \\
& x_1 + 4x'_2 - 4x''_2 + x_4 = 16 \\
& 4x_1 - 3x'_2 + 3x''_2 + x_5 = 7 \\
& x_2 = x_2' - x_2'' \\
& x_1, x_3, x_4, x_5, x_2', x_2'' \geq 0
\end{aligned}
$$

b. Gráficamente:



- Los puntos que se podrían plantear con una base son: A, B, C, D, E, G, que corresponden a la intersección de todas las restricciones del problema. Son en total 6 bases. **OJO**: Los puntos F y H no se pueden representar con una base, ya que en este problema x_2 es irrestricto, es decir, en esos puntos solo pasa una restricción como vimos en la clase. El eje esta dibujado como referencia, pero en este problema no funciona como restricción como en problemas habituales donde $x_2 \geq 0$.

- De estos 6 puntos, 4 son factibles (A, B, C, D). Por lo tanto, existen 4 bases factibles.

- El óptimo está en el punto C, donde $X_1=4$, $X_2=3$, con lo que Z=7.

- A este problema, se puede agregar la restricción $X_2 \geq 0$. Esta restricción no cambia la región factible del problema, y facilita el uso de simplex 'habitual'.

c. Suponiendo que agregamos la restricción $x2 \geq 0$, entonces el origen es un punto **degenerado**. Esto se puede argumentar de 2 formas:

- Se ve claramente en el gráfico, ya que el (0,0) está formado por la intersección de los 2 ejes y una restricción.

- Como en el punto existe una variable básica igual a cero, entonces es degenerado.

Nota de corrección: Ambas son correctas, aunque TIENEN que nombrar por lo menos la primera, ya que se pide expresamente la interpretación gráfica. Si ponen solo la segunda, descontar puntaje.

Este punto está descrito por 3 bases, que se muestran a continuación:

1. $X_N=(X_1,X_2)$; $X_B=(X_3,X_4,X_5)$ // B={3,4,5}
2. $X_N=(X_1,X_3)$; $X_B=(X_2,X_4,X_5)$ // B={2,4,5}
3. $X_N=(X_2,X_3)$; $X_B=(X_1,X_4,X_5)$ // B={1,4,5}

Estas 3 bases son factibles. No tendría sentido que no lo fueran, ya que se ve gráficamente que están en la región factible.

Verifiquémoslo (en el mismo orden):

1. $A_B^{-1}*b= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$ => Es factible
2. $A_B^{-1}*b= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$ => Es factible
3. $A_B^{-1}*b= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$ => Es factible

Nota: ¿Por qué $\overline{b} = A_B^{-1} * b \geq 0$ *implica que la solución básica es factible? Simplemente porque si ALGUNO de sus términos fuera negativo, implicaría que una variable básica es NEGATIVA, lo que se contradice con la definición de las variables en la forma estándar (todas positivas). Recuerden que* $X_B = \overline{b}$ *siempre en simplex! (miren el desarrollo de simplex que hicimos en la auxiliar y verán que esto último es cierto, considerando* $X_N=0$*).*

No es necesario usar fase 1, ya que el origen es un punto factible, como ya se ha demostrado. Fase 1 es un método para encontrar una base inicial factible, cuando el origen no es solución factible del problema.

d. *Si agregaron* $X_2 \geq 0$

En el óptimo, las variables básicas son $X_b=(X_1,X_2,X_3)$ y las no básicas $X_N=(X_4,X_5)$.

Calculamos:

$$A_B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3/19 & 4/19 \\ 0 & 4/19 & -1/19 \\ -1 & 14/19 & -13/19 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A_N} = \begin{pmatrix} 3/19 & 4/19 \\ 4/19 & -1/19 \\ 14/19 & -13/19 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = (0 \quad 0) - (-1 \quad -1 \quad 0) * \overline{A_N}$$

$$\overline{Cr} = (7/19 \quad 3/19) \geq 0$$

- Recuerden que C_N y C_B son los coeficientes que acompañan a las variables en la función objetivo EN LA FORMA ESTÁNDAR.

Como ambos costos reducidos son positivos, estamos en el óptimo.

Por lo tanto, el punto óptimo es $X_1=4$, $X_2=3$, $X_3=7$, $X_4=X_5=0$ y con esto $Z=7$.

- Esto sale de recordar que $X_B = \overline{b}$ en cada iteración de simples, entonces:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Si no agregaron la restricción, tienen la forma estándar de la parte a:

En el óptimo, las variables básicas son: $x_b=(x_1, x_2', x_3)$ y las no básicas son $X_r=(x_2'', x_4, x_5)$.

Calculamos:

$$A_B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3/19 & 4/19 \\ 0 & 4/19 & -1/19 \\ -1 & 14/19 & -13/19 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A_N} = \begin{pmatrix} 0 & 3/19 & 4/19 \\ -1 & 4/19 & -1/19 \\ 0 & 14/19 & -13/19 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = (1 \quad 0 \quad 0) - (-1 \quad -1 \quad 0) * \overline{A_N}$$

$$\overline{Cr} = (0{,}7/19 \quad 3/19) \geq 0$$

Como ambos costos reducidos son positivos, estamos en el óptimo.

Por lo tanto, el punto óptimo es $X_1=4$, $X'_2=3$, $X_3=7$, $x'_2=X_4=X_5=0$ y con esto $Z=7$.

La interpretación gráfica va por el lado de señalar que, como estábamos comenzando desde el óptimo, es claro que simplex encontrará la solución en una sola iteración.

Noten que simplex encuentra el óptimo en una iteración, pues partimos desde el punto que sabíamos de antemano que era óptimo. Queda propuesto resolver éste problema partiendo desde el origen (punto (0,0)). Si tienen dudas, pregunten en el foro. Para hacerlo, vean primero el problema que dejamos adjunto a esta ayudantía, donde resolvemos un problema completo. Partan con X_N $\{X_1,X_2\}$, $X_B=[X_3,X_4,X_5]$, *la base típica para partir simplex cuando el origen es solución factible. Les ocurrirá que simplex se queda "pegado" en el origen por una iteración, esto ya que el origen es un punto degenerado (es decir, van a intercambiar una variable de* X_B *con una de* X_N*, pero la base seguirá representando al origen). Aprovechen de comprobar que en el* $\overline{b}$ *les da un valor cero en alguna de sus componentes. Esto siempre es así cuando están en un punto degenerado ;). Noten que como no se movieron del origen, entonces en esa iteración la función objetivo no mejoró, pero en la seguiente si va a mejorar (pues al fin se van a mover hacia otro vértice).*

Es importante que miren el problema del otro archivo, ya que ahí sale el criterio de salida de una variable de la base, que no aparece en este problema pues nunca se necesita.

Problema 2:

a) Esto es cierto para soluciones no degeneradas. Para el caso degenerado puede ocurrir que haya una base no óptima asociada a un punto óptimo, por lo que esta base tendrá algún costo reducido negativo que hará que el algoritmo siga iterando hasta encontrar la base óptima.

b) Esto es cierto para el caso no degenerado. En general, puntos degenerados pueden estar asociados a más de una base, luego, como Simplex busca el óptimo recorriendo las bases, puede ocurrir que llegue al punto óptimo visitando una de sus bases que no es la base óptima, y por lo tanto, debe realizar al menos una iteración extra, en la que no cambia de punto (no mejora la función objetivo) y no se llega necesariamente a la base óptima.
Otro argumento válido es cuando el problema es no acotado. En la última iteración, Simplex se da cuenta que no hay ninguna variable básica que cumpla el criterio de salida de la base, y por lo tanto, termina con el resultado "no acotado", o bien "$-\infty$", caso en el que no se llega a la solución óptima (no la hay) y no se mejora el valor de la función objetivo.

c)

1. Se considera una base factible B si se cumple lo siguiente es optima:
$$\bar{b} = A_B^{-1} b \geq 0$$
$$\bar{c} = c_N - c_B A_B^{-1} A_N \geq 0$$

2. Al buscar la variable que sale de la base si se encuentra un empate, es decir, hay dos cocientes de idéntico valor, se tiene una solución degenerada ya que **al menos una variable básica tendrá valor cero en la columna de solución** (es decir, si ustedes miran el vector "b barra" y alguno de sus componentes es cero, están en un punto degenerado).

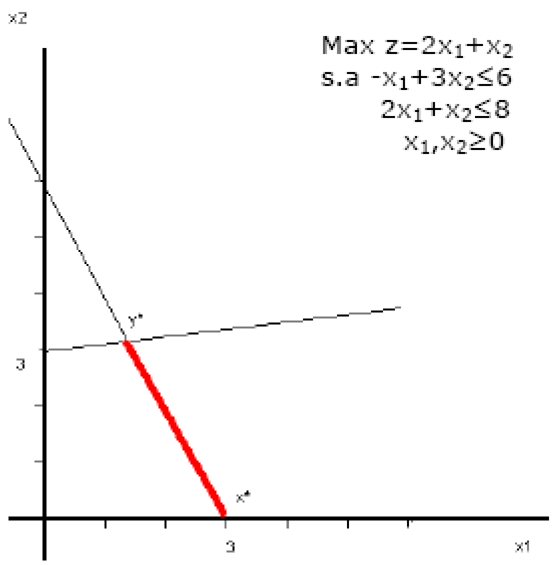
3. La solución final tiene un costo reducido igual a cero asociado a una variable no básica. De esa forma si se incorpora a la base no cambia el valor del óptimo (ver bonus track más adelante).

4. Se tiene cuando decidimos que la variable x_s entre y no encontramos una que se anule al hacer crecer x_s. Esto se verifica si $\min_{\bar{a}_{is}>0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\}$ es infactible para algún s porque no existen $\bar{a}_{is} > 0$ (ver bonus track más adelante).
5. Fase I de Simplex: Consiste en agregar tantas variables artificiales como sea necesario para formar una identidad y luego resolver un problema de optimización consistente en tratar de que dichas variables artificiales se hagan nulas y por tanto se puedan eliminar. Si la suma óptima de variables artificiales es nula significa que todas las variables artificiales son nulas y por tanto las podemos eliminar obteniendo un vértice factible:

Bonus track Auxiliar 5:

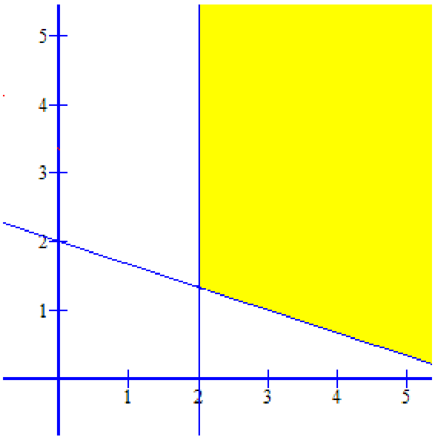
A continuación se muestran algunos casos particulares con los que se puede encontrar simplex y cómo el algoritmo los detecta:

Ejemplo 1: Infinitos óptimos: Esto sucede cuando la pendiente de la función objetivo tiene el mismo valor que la pendiente de una de las restricciones. (Son paralelas).



En este caso todos los puntos en el tramo rojo son soluciones óptimas que entregan el mismo valor para la función objetivo. Usando simplex pueden darse cuenta de esto si, al encontrar el óptimo, uno de los costos reducidos es IGUAL a cero (cualquiera). La intuición nos dice que si en el óptimo un costo reducido es cero, es como si pudiéramos meter la variable asociada a la base sin perjudicar ni beneficiar a la función objetivo, por lo tanto podemos saltar a otro vértice y mantener la fn objetivo en el mismo valor. Si puedo saltar a otro vértice, entonces todo el tramo recorrido (linea roja) son soluciones óptimas, dadas las características del poliedro (convexo) y función objetivo (convexa). Por ende, existen infinitas soluciones.

Ejemplo 2: Espacio no acotado, solución infinita:



Max x_1+x_2
s.a $x_1 >= 2$
$x_1+3x_2 >= 6$

Como estamos maximizando, podríamos llegar hasta el infinito. Simplex se da cuenta de esto cuando salta de un vértice al siguiente y éste último está en el "infinito" (i.e. no encuentra el siguiente vertice). Lo que ocurrirá será que no habrá problemas para decidir que variable entra a la base, pero no encontraremos ninguna variable que salga de la base cumpliendo las condiciones requeridas, i.e. todos los $\overline{a_{is}}$ serán menores que cero al hacer la minimización del criterio de salida. Si encontramos esta situación con simplex podemos concluir que el problema es no acotado.

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl