INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Richard Weber, Rodrigo Wolf

Auxiliares: Victor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara

Problema complementario auxiliar 5

Nota: Este problema tiene como objetivo simplemente que vean el algoritmo de simplex "funcionando". Es importante que sepan como es que funciona, como van entrando y saliendo las variables de la base, etc. Es importante que sepan cómo hacer las iteraciones! El foco de las preguntas de control son más bien teóricas, sin embargo eso no implica que no se pueda preguntaruna iteración del algoritmo, por ejemplo. Es necesario que sepan como multiplicar matrices, sin embargo nunca se les pedirá invertir una (si se necesita, se las daríamos).

Por último, en la auxiliar 5 nunca se habla del criterio de salida de la base, pues nunca fue necesario usarlo. Cuando lo usé más abajo lo dejé explicado para que lo entiendan.

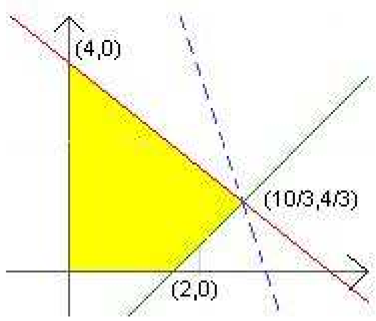
Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 \\ s.a: \quad & 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2, \geq 0 \end{aligned}$$

1. Grafique el problema (D), especificando claramente las restricciones, función objetivo y área factible. Calcule el óptimo.
2. Resuelva el problema utilizando SIMPLEX matricial, comenzando desde el origen.

Solución:

1) El gráfico del problema se muestra a continuación:



El punto óptimo es (10/3,4/3).
z = 11,3

2) Primero se debe llevar el problema a la forma estándar

$$\begin{aligned} \min -z &= -3x_1 - x_2 \\ s.a: \quad & 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Comenzamos desde el origen, por lo que las variables no básicas son X_1 y X_2.
Las variables básicas son X_3 y X_4. Con lo anterior se tiene que:

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_N = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{A_R} = A_B^{-1} * A_R = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{b} = A_B^{-1} * b = \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = [-3 \quad -1] - [0 \quad 0] * \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{Cr} = [-3 \quad -1]$$

No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos negativos.
Criterio de entrada a la base: Entra la variable con menor costo reducido, **entonces entra X_1**

Criterio de salida de la base: $\min_{ais} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{\overline{a_{is}}} \right\} = \left\{ \frac{20}{4} \quad \frac{2}{1} \right\} \Rightarrow$ **Sale X_4**

Nota: ¿Por qué es este el criterio de salida? (esta explicación no es tan rigurosa y NO reemplaza lo visto en cátedra, pero les ayudará a visualizar el concepto).

Recordemos el problema que optimiza simplex, según lo que les mostré en la auxiliar (al menos lo vimos en la sección 1. Si no lo mostraron en la sección 2, revisen el apunte "Simplex.pdf" de material docente):

$$\begin{aligned} &\min\{C_B \bar{b} + (C_N - C_B \overline{A_N}) X_N\} \\ &s.a.\ X_B = \bar{b} - \overline{A_N} X_N \\ &\qquad X_B, X_N \geq 0 \end{aligned}$$

Anteriormente decidimos que una variable no básica va a entrar a la base mediante el criterio de entrada (o sea, tomar la variable con el costo reducido más negativo). Esto implica que todas las variables en X_N valdrán cero (por definición), excepto aquella que va a entrar a la base, la que dejará de valer cero. En tal caso, los términos que sobreviven en las restricciones son aquellos asociados a la columna de $\overline{A_N}$ asociada a la variable que entra. Para ver esto basta con hacer la multiplicación $\overline{A_N} X_N$ considerando todas las X_N cero, excepto aquella que va a entrar a la base. Así, nos queda (en notación matricial, siendo S la variable que entra):

$$X_B = \overline{b} - \overline{A_S} X_S$$

(donde As es sólo la columna S de la matriz A, el resto desaparece pues está multiplicado por X=0) y separándolo en m restricciones:

$$X_{1B} = \overline{b_1} - \overline{a_{1S}} X_S$$
$$\ldots$$
$$X_{mB} = \overline{b_m} - \overline{a_{mS}} X_S$$

La pregunta del millón: ¿qué variable X_{iB} es la que PRIMERO se hace cero cuando X_S crece? (recuerden que nos estamos moviendo a un vértice adyacente). Fíjense que X_{iB} vale cero cuando $X_S = \overline{b_i} / \overline{a_{is}}$. Por lo tanto, la primera variable que se hace cero es la que corresponde al mínimo de los $\overline{b_i} / \overline{a_{is}}$, que corresponde al criterio de salida mostrado anteriormente (es decir, X_S va creciendo y cuando llega a cierto valor, algún X_{iB} se hace cero, eso es lo que buscamos... el primero que se hace cero, pues así garantizamos que es un vértice adyacente, se activó una restricción).

Con esto, las nuevas variables básicas son X_3 y X_1 y las no básicas X_4 y X_2

Ahora iteramos:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{R} = B^{-1} * R = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{b} = B^{-1} * b = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = [-3 \quad -1] - [0 \quad 0] * \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{Cr} = [3 \quad -4]$$

No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos negativos.
Criterio de entrada a la base: Entra la variable con menores costos reducidos, entonces entra X_2

Criterio de salida de la base: $\min_{ais}\left\{\frac{\overline{b_i}}{\overline{a_{is}}}\right\} = \left\{\frac{12}{9}\right\} \Rightarrow$ Sale X_3

Con esto, las nuevas variables básicas son X_2 y X_1 y las no básicas X_4 y X_3

Iteramos nuevamente:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/9 & -4/9 \\ 1/9 & 5/9 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{R} = B^{-1} * R = \begin{bmatrix} -4/9 & 1/9 \\ 5/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{b} = B^{-1} * b = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 10/3 \end{bmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = [-3 \quad -1] - [0 \quad 0] * \begin{bmatrix} -4/9 & 1/9 \\ 5/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{Cr} = [11/9 \quad 4/9]$$

Como ambos costos reducidos son positivos, estamos en el óptimo.

Por lo tanto, el punto óptimo es X_1=10/3, X_2= 4/3 y con esto Z = 11,3.(esto último recordando que X_B=”b barra” y X_N=0

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl