INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Leonardo López, Ximena Schultz, Richard Weber

Auxiliares: Fernanda Bravo. André Carboni, Nelson Devia, Ignacio Escobar, Rodrigo Wolf

IN34A – Optimización
Auxiliar N°6
22 de octubre, 2008

Problema 1

Una compañía de automóviles quiere producir un nuevo modelo de auto en su línea de producción, la cual cuenta con una capacidad ociosa. Es te modelo puede producirse en dos tipos: BKN y NORMAL.

El auto BKN y el NORMAL le rentarán a la compañía una utilidad de 5 y 4 unidades monetarias respectivamente. El gerente de marketing sostiene que la demanda total por este modelo es de 5 unidades por día, como máximo. El gerente de recursos humanos afirma que se cuenta con 45 horas-hombre por día para dedicar a esta nueva línea productiva. Además en el departamento de operaciones se ha es timado que se requieren 10 horas-hombre por día para producir una unidad del modelo BKN y 6 horas-hombre por día para producir una unidad del modelo NORMAL.

i. Plantee el modelo de programación lineal entera que debe resolver el gerente de producción de la empresa
ii. Entregue la solución del problema desarrollando el algoritmo *"Branch & Bound"*.

Problema 2

La empresa Máxima S .A., luego del fracaso de Pulschuper para encontrar a la famosa maleante Carmen San Diego, decidió despedirla, motivo por el cual Pulschuper debe abandonar la oficina y no volver nunca más.

El problema es que solo llevó una mochila pequeña con capacidad de 2lt. y en su estante tiene su laptop, una foto de su hija, su polerón favorito y un lápiz. Si los utensilios utilizan una capacidad de 1.2, 0.6, 0.8 y 0.3 respectivamente y tienen utilidades de 8, 10, 5 y 1 respectivamente, utilice el algoritmo *"Branch & Bound"* para ayudar a Pulschuper a decidir qué utensilios llevarse a su casa.

Problema 3

Sea X_1 la solución del siguiente problema P1:

$$\begin{aligned} P1 \quad & Min\ z = c^T x \\ & s.a. \quad Ax = b \\ & x \in \{0,1\} \end{aligned}$$

El Problema anterior se puede aproximar mediante el siguiente problema relajado PR:

$$\begin{aligned} PR \quad & Min\ z = c^T x \\ & s.a. \quad Ax = b \\ & x \in [0,1] \end{aligned}$$

Donde X_r es la solución al problema relajado.

¿Es posible asegurar que $X_r = X_1$? Fundamente su respuesta.

Solución

Problema 1

Variables:

x_1: cantidad de autos BKN fabricados en el día

x_2: cantidad de autos NORMAL fabricados en el día

Restricciones:

$x_1 + x_2 \leq 5$ No exceder demanda

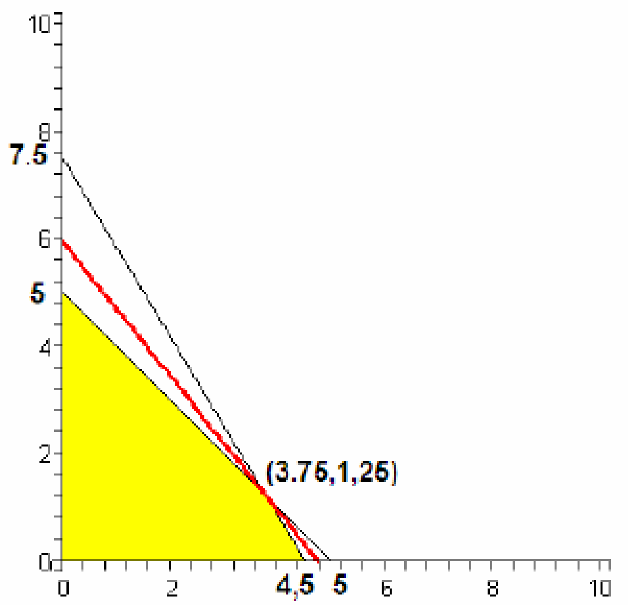
$10x_1 + 6x_2 \leq 45$ No exceder horas-hombre disponibles

Función Objetivo:

$$\max \quad z = 5x_1 + 4x_2$$

Naturaleza de las Variables:

$$x_1, x_2 \in Z^+$$



El óptimo está dado por la intersección de las restricciones, siendo ésta el punto (3.75, 1.25), obteniéndose Z_0=23.75

Ramificación

$x_1 \leq 3$ ==> x_1=3, x_2=2, Z_1=23 *Incumbente*: Z_1=23

$x_1 \geq 4$ ==> x_1=4, x_2=0,83, Z_2=23,33

$x_2 \leq 0$ ==> x_1=4,5, x_2=0, Z_3=22.5 < Z_1 no se sigue iterando

$x_2 \geq 1$ ==> infactible, se viola 2ª restricción

Luego la solución óptima es:

$$(x_1, x_2) = (3, 2)$$

$$Z = 23$$

Problema 2

Variables:

$$x_1 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva notebook} \\ 0 & \sim \end{cases} \qquad x_3 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva poleron} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva foto} \\ 0 & \sim \end{cases} \qquad x_4 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva lapiz} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Restricciones:

$$1,2x_1 + 0,6x_2 + 0,8x_3 + 0,3x_4 \le 2$$ Capacidad de la Mochila

Función Objetivo

$$\max \quad z = 8x_1 + 10x_2 + 5x_3 + x_4$$

Naturaleza de las Variables:

$$x_i \in \{0,1\} \; \forall i = 1...4$$

Para obtener el óptimo del problema relajado, se calculan las razones beneficio/volumen:

Laptop: $8/1,2 = 6,67$ Polerón: $5/0,8 = 6,25$

Foto: $10/0,6 = 16,67$ Lápiz: $1/0,3 = 3,33$

Para obtener la solución se llena la mochila llenándola con los objetos que tienen mayor razón beneficio/costo hasta llenarla. La solución óptima del problema relajado queda

$$x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 0,25; x_4 = 0; Z_0 = 19,25$$

Ramificamos para x_3,

x_3 = 1 ==> x_1=0,5; x_2=1; x_3=1, x_4=0; z_1=19

x_1 = 1 ==> x_1=1; x_2=0; x_3=1, x_4=0; z_2=13 *Incumbente*: Z_2=13
x_1 = 0 ==> x_1=0; x_2=1; x_3=1, x_4=1; z_3=16 *Incumbente*: Z_3=16

x_3=0 ==> x_1=1; x_2=1; x_3=0, x_4=2/3; z_4=18,66

x_4 = 1 ==> x_1=11/12; x_2=1; x_3=0, x_4=1; z_5=18,33

x_1 = 1 ==> x_1=1; x_2=5/6; x_3=0, x_4=1; z_6=17,33

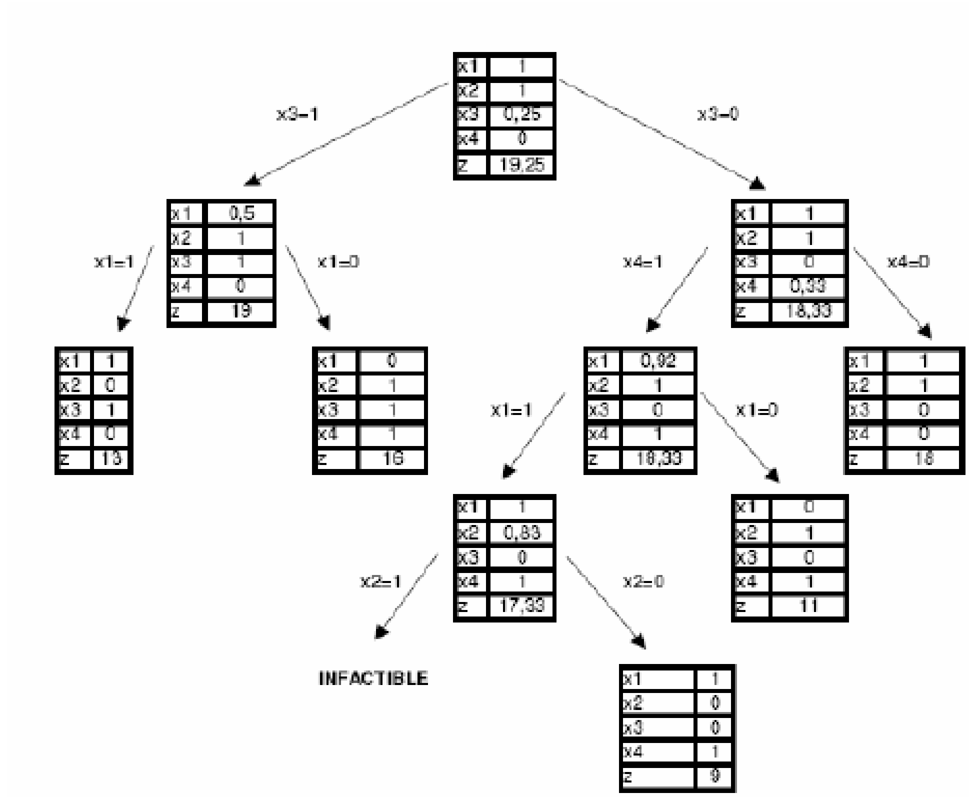
x_2 = 1 ==> infactible
x_2 = 0 ==> x_1=1; x_2=0; x_3=0, x_4=1; **z_7=9 Peor que el incumbente**

x_1 = 0 ==> x_1=0; x_2=1; x_3=0, x_4=1; **z_8=11 Peor que el incumbente**

x_4 = 0 ==> x_1=1; x_2=1; x_3=0, x_4=0; z_9=18 Incumbente: Z_9=18

La solución óptima es

$$x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = x_4 = 0; \quad z = 18$$



Problema 3

R: El espacio de soluciones factibles de P1 es subconjunto del espacio de PR. Si la solución de PR es entera, se tendrá $X_r = X_1$, de lo contrario el óptimo de PR no estará contenido en el conjunto factible de P1, obteniéndose óptimos distintos.