INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Fernanda Bravo, Richard Weber, Rodrigo Wolf.

Auxiliares: Andrés Abeliuk, Víctor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Daniel Lillo.

Control 2 IN3701
Primavera 2009

Pregunta 1

1)

a) 1. Sea x solución básica de un PPL, la cual tiene asociada la matriz básica A_B. Pruebe que si los costos reducidos de todas las variables no básicas son positivos, entonces x es la única solución óptima. (0,4)

2. Considere el problema de minimizar $c'x$ en un poliedro P. Si x solución factible, será óptima si y solo si $c'd \geq 0$ para toda dirección factible d en x. (0,4)

b) Explique, utilizando la notación vista en clases, cómo el algoritmo simplex determina:
El Óptimo de un problema de optimización. (0,2)
Si una solución es Degenerada. (0,2)
La existencia de Múltiples Óptimos. (0,2)
Si el problema es No Acotado. (0,2)
Solución Factible Inicial. (0,2)

c) Comente la veracidad de la siguiente afirmación: "si el problema primal es difícil de resolver entonces con mayor razón va a ser difícil de resolver el dual". ¿De ser falsa la afirmación vale la pena estudiar esta teoría?(0,4)

2) EconomicBook es una empresa cuyo modelo de negocios es producir una escasa variedad de notebooks, pero a un muy buen precio.

Esta compañía actualmente es capaz de fabricar 4 modelos de notebooks, estos se arman a través de 6 piezas que EconomicBook ya le compró a terceros. Cada uno de los modelos requiere una cantidad distinta de cada una de estas piezas, lo que se muestra en las siguientes restricciones (donde x_i representa las unidades a producir del notebook i):

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 30$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 80$$
$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 100$$
$$x_2 + x_4 \leq 17$$
$$x_1 + x_3 \leq 35$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 68$$

Por su parte, a la empresa cada unidad del producto 1 que fabrica le reporta una utilidad de 3, mientras que cada unidad del notebook 2 le brinda un beneficio de 2, a su vez cada unidad del ordenador 3 le genera 5 y cada unidad que hacen del producto 4 les da un beneficio de 4.

A la hora de resolver el problema, la base óptima resulta ser aquella asociada a las variables x_1, x_4, x_5, x_8, x_9 y x_{10}. Donde x_5, x_8, x_9 y x_{10} son las variables de holgura de la primera, cuarta, quinta y sexta restricción respectivamente.

Como dato se sabe que B^{-1} =

0.000	-0.500	0.500	0.000	0.000	0.000
0.000	0.500	-0.250	0.000	0.000	0.000
1.000	0.000	-0.250	0.000	0.000	0.000
0.000	-0.500	0.250	1.000	0.000	0.000
0.000	0.500	-0.500	0.000	1.000	0.000
0.000	-0.500	-0.250	0.000	0.000	1.000

a) ¿Cuál es el valor de las 4 variables de decisión y las 6 variables de holgura del problema? (1)

b) Le ofrecen \$5 por 5 unidades de la materia prima 5 (restricción número 5) ¿las acepta? ¿Por qué? (0,6)

c) Plantee el dual del problema original (0,25)

d) Encuentre usando el teorema de holgura complementaria el valor de las variables duales. ¿Cuál es el significado de estas variables? (0,75)

e) ¿Cuánto puede variar el coeficiente que acompaña en la función objetivo a la variable x_2 sin que varié el óptimo? Comente el resultado. (0,6)

f) Un analista de la empresa le señala: "Sea cual sea la variación de b_1 tanto el óptimo como la base óptima del problema van a variar". ¿Es esta afirmación correcta? Justifique. (0,6)

Pregunta 2
Aumento de Capacidad de Plantas de CMPC

La Compañía Manufacturera de Papeles y Cartones (CMPC) ha decidido ampliar la capacidad de una de sus plantas, en un horizonte de t períodos (cada período corresponde a 3 meses). Suponga que esta planta produce un solo producto, el cual debe satisfacer una demanda d_i en cada periodo i, la que es conocida. Además, en cada período se debe procurar no producir más que la demanda dada, ya que ese dinero podría ser ocupado en la expansión de la planta. El propósito de la empresa es maximizar la capacidad productiva de la planta al final del período t.

Para realizar la expansión, la empresa dispone de un capital inicial y de los recursos que obtenga por la venta de su único producto. Suponga que el costo de producción de una unidad es de p dólares (asociados a materias primas y pago de salarios) y una unidad de capacidad de la planta. Además, cada unidad genera una utilidad neta de r dólares que están disponibles al principio del período siguiente.

En cada período, la empresa dispone de dos tecnologías constructivas para ampliar su planta. Cada una de ellas requiere de efectivo durante el período de expansión y difieren en el tiempo requerido para llevar a cabo dicha expansión. Específicamente, construir una unidad de capacidad adicional usando la tecnología 1 requiere de b dólares al inicio de la construcción y genera la capacidad adicional al comienzo del período siguiente. Por otra parte, construir una unidad adicional de capacidad usando la tecnología 2 requiere de c dólares al inicio de la construcción y genera la capacidad adicional en el período subsiguiente. Sin embargo, por limitaciones de la empresa, no se pueden instalar las dos tecnologías en un mismo período, pero sí se puede expandir en más de una unidad usando la misma tecnología.

Al comienzo del horizonte de análisis, la compañía cuenta con un capital de D dólares para financiar su producción y expansión. La capacidad de la planta al inicio del periodo 1 es K. Formule un modelo de programación lineal que permita maximizar la capacidad de la planta al final del periodo t.

PAUTA CONTROL 2
IN3701 – PRIMAVERA 2009

SOLUCIÓN

P1)

1)

a)

1.(0,4)

Existen varias formas de probar el resultado una es:

Sea $\bar{x}$ otra solución básica factible, primero hay que notar que dado que $x \neq \bar{x}$ existe un $i \in R$ tal que $\bar{x}_i > 0$, es decir no puede tener las mismas variables no básicas. Para ver esto si $\bar{x}_R = 0$, $A\bar{x} = b \Rightarrow A_B\bar{x}_B = b$ pero ya se tiene que $A_Bx_B = b$ luego $\bar{x}_B = x_B \Rightarrow \bar{x} = x$
Finalmente dado que los costos reducidos de las variables básicas son 0 y como $\bar{c}_i > 0, \bar{x}_i > 0$ se tiene que: $0 = \bar{c}x < \bar{c}_i\bar{x}_i \leq \bar{c}\bar{x}$, por lo tanto $\bar{x}$ no es óptimo, y se concluye que el óptimo es único.

2.(0,4)

Sea d una dirección factible, se tiene que d=x'-x donde por definición x' pertenece a P. Luego sigue que si c'd<0 entonces c'x'<c'x lo que quiere decir que hay un punto más chico que x, luego para que x sea mínimo, ninguna dirección puede llegar a un punto más chico, por lo tanto $c'd \geq 0$ $c'd \geq 0$ para toda dirección factible d en x.

b)

- (0,2) Se considera una base factible B si se cumple lo siguiente es optima:

$$\bar{b} = A_B^{-1}b \geq 0$$
$$\bar{c} = c_N - c_BA_B^{-1}A_N \geq 0$$

- (0,2) Al buscar la variable que sale de la base si se encuentra un empate, es decir, hay dos cocientes de idéntico valor, se tiene una solución degenerada ya que al menos una variable básica tendrá valor cero en la columna de solución

- (0,2) La solución final tiene un costo reducido igual a cero asociado a una variable no básica. De esa forma si se incorpora a la base no cambia el valor del óptimo.

- (0,2) Se tiene cuando decidimos que la variable x_s entre y no encontramos una que se anule al hacer crecer x_s. Esto se verifica si $\min_{\bar{a}_{is}>0}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}\right\}$ es infactible para algún s porque no existen $\bar{a}_{is} > 0$

- (0,2) Fase I de Simplex: Consiste en agregar tantas variables artificiales como sea necesario para formar una identidad y luego resolver un problema de optimización consistente en tratar de que dichas variables artificiales se hagan nulas y por tanto se puedan eliminar. Si la suma óptima de variables artificiales es nula significa que todas las variables artificiales son nulas y por tanto las podemos eliminar obteniendo un vértice factible:

-

c) Esto es falso, que el dual sea fácil o difícil de resolver no dice nada a priori del dual, de hecho una de las gracias de esta teoría que si el primal es difícil de resolver podría ocurrir que el dual sea sencillo y en ese caso se resuelve el dual y luego vía holgura complementaria se regresa al primal y esto es una de las razones que hace que valga la pena estudiar esto

2)

a)

x_2, x_3, x_6 y x_7 valen cero ya que son variables no básicas. Por su parte las otras variables valen:

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 5 \\ 2 \\ 25 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Habría que aceptar la oferta porque me están sobrando 25 unidades de esa materia prima, luego si me puedo desesar de algo mucho mejor

c)

$$\min \ (30\ 80\ 100\ 17\ 35\ 68)\ y$$

s.a.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} y \geq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$y \geq 0$$

d)

Dado que las restricciones 1, 4,5,6 del problema primal no están activas se tiene que

$y_1 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$

Dado que x_2 y x_3 son 0 usando el teorema de holgura queda:

$$x_1(3 - y_1 - 2y_2 - 4y_3 - y_5 - 2y_6) = 0$$
$$x_4(4 - y_1 - 4y_2 - 4y_3 - y_4 - 3y_6 = 0$$

Reemplazando por los valores conocidos queda:

$(3 - 2y_2 - 4y_3) = 0$

$(4 - 4y_2 - 4y_3) = 0$

Luego $y_2 = 1/2$, $y_3 = 1/2$

Las variables y_i nos dicen cuanto aumenta la función objetivo si aumento en 1 la cantidad de piezas i disponible, en particular las que valen 0 es porque las piezas que representan no se están ocupando totalmente (restricciones no activas).

e)

Lo que hay que calcular es:

$$\overline{c_2} = c_2 - (-3 - 4\ 0\ 0)B^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

(ojo la FO fue llevada a la forma estándar de minimización por eso los coeficientes salen con menos).Esto hay que imponer que sea mayor o igual a 0

Luego esto trae consigo que la condición es $c_2 \leq 2$

Por lo tanto si es que la ganancia fuese levemente superior a la que se da como dato el optimo del problema variaría. Se podría decir que el optimo es muy sensible ante variaciones positivas de c_2

f)

El valor de las variables es 0 cuando una variable no esta en la base y para las básicas se calcula como: $B^{-1}b$. Luego cualquier variación en el vector b_1 genera cambios en el optimo, eso es cierto, pero no es cierto que la base optima tenga que cambiar. De hecho esta no variará mientas se cumpla que:

$$B^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\80\\100\\17\\35\\68\end{pmatrix} \geq 0$$

P2)

El problema consiste en decidir la forma de maximizar la capacidad de la planta, esto es, en que periodo realizar la expansión y con que tipo de tecnología. Definiremos las siguientes variables de decisión:

z_i = # de unidades de expansión llevadas a cabo en el periodo i usando la tecnología 1
w_i = # de unidades de expansión llevadas a cabo en el periodo i usando la tecnología 2

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ si se usa la tecnologia 1 para aumentar la capacidad de la planta en el periodo 1} \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 \text{ si se usa la tecnologia 2 para aumentar la capacidad de la planta en el periodo 1} \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Consideremos además, las variables ligadas:

K_i = capacidad de la planta al principio del periodo i.
D_i = capital disponible al principio del periodo i.
u_i = producción en el periodo i.

Donde $D_1 = D$ y $K_1 = K$ son datos del problema.

EL objetivo del problema es maximizar la capacidad de la planta al final del periodo t (que es lo mismo que maximizar K_{t+1}) considerando que la producción en el periodo 1 está limitado por la capacidad inicial K, que no se pueden instalar las dos tecnologías en un mismo periodo, la restricción de carga que liga las variables Z_i y W_i con X_i y Y_i respectivamente (donde se considera una constante M lo suficientemente grande) y las restricciones que relacionan el capital, la capacidad y la producción entre un periodo y otro. De acuerdo a lo anterior, el modelo resulta ser:

$$P)\ \text{Max } K_{t+1}$$

$$u_i \leq K_i \quad \forall i$$
$$x_i + y_i \leq 1 \quad \forall i$$
$$zi \leq Mxi \quad \forall i$$
$$wi \leq Myi \quad \forall i$$
$$D_i = D_{i-1} - bz_{i-1} - cw_{i-1} - pu_{i-1} + ru_{i-1} \quad \forall i$$
$$K_i = K_{i-1} + z_{i-1} + w_{i-2} \quad \forall i$$
$$D_i \geq bz_i + cw_i + pu_i \quad \forall i$$
$$u_i = d_i \quad \forall i$$
$$D_1 = D$$
$$K_1 = K$$
$$x_i, Y_i \ \mathcal{E}\ \{0, 1\}$$
$$z_i, w_i, x_i, K_i, D_i, u_i \text{ enteros} \quad \forall i$$