

Examen 05 Diciembre 2009

Pregunta 1

- a) Mediante las definiciones de solución básica y vértice, demuestre que dado x una solución básica de un poliedro P , entonces ésta es también vértice de P . (1,2 pts)
- b) En simplex. Dada una solución básica degenerada, porque puede darse que no toda dirección básica es factible?. Dada una solución básica factible, ¿Cómo demostramos optimalidad y/o encontramos una mejor solución?. (1,2 pts)
- c) Sea el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.a.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{array}$$

Y su correspondiente dual:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1, \dots, n \\ & y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

Demuestre que si el primal es no acotado ($z_p = \infty$) entonces el dual es infactible. (1,2 pts)

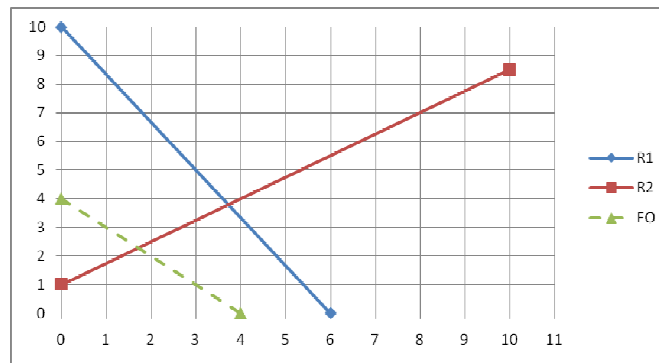
- d) Una empresa a resuelto un problema de optimización y ha encontrado que el óptimo \bar{x} le permite tener utilidades de \$500.000.000. Sin embargo, ante cambios en los parámetros del problema las utilidades que se encuentran con \bar{x} son en algunos casos bajísimas en comparación al mejor valor posible y en otros casos se comporta bastante bien. Por su parte, \bar{y} genera una utilidad de \$480.000.000, pero ante cambios en los parámetros del problema siempre se comporta bien, nunca esta a más de un 5% del mejor valor posible. Los ingenieros que definieron los parámetros del problema trabajaron mucho para encontrar estos valores, mas ellos mismos señalan que es imposible asegurar que la demanda, precios de las materias primas, etc tengan exactamente el mismo comportamiento que ellos predijeron. Por ejemplo, si la predicción de la demanda es errada en un 1% la solución \bar{x} genera utilidades muy bajas. ¿Qué solución le recomendaría a la empresa que aplique? \bar{x} o \bar{y} . ¿Por qué?. (1,2 pts)
- e) Pizza Arrivederchi, desea ser lo más eficiente posible con sus tiempos de viajes, es por ello que han modelado la ciudad como una red. Es así como cuando entra un pedido la idea es que el repartidor vaya al lugar del pedido y retorne a la pizzería en el menor tiempo posible. ¿Cómo resolvería este problema, es decir, el de ir de un lugar a otro y luego retornar al de origen en el menor tiempo posible sin hacer un PPL? (1,2 pts)

Pregunta 2

1. (2.4 Ptos.) Sea el siguiente Problema Entero.

$$\begin{aligned} (PE) \quad & \text{Max } x+y \\ R1: \quad & y + \frac{5}{3}x \leq 10 \\ R2: \quad & -\frac{3}{2}x + 2y \leq 2 \\ & x, y \geq 0, \text{Enteros} \end{aligned}$$

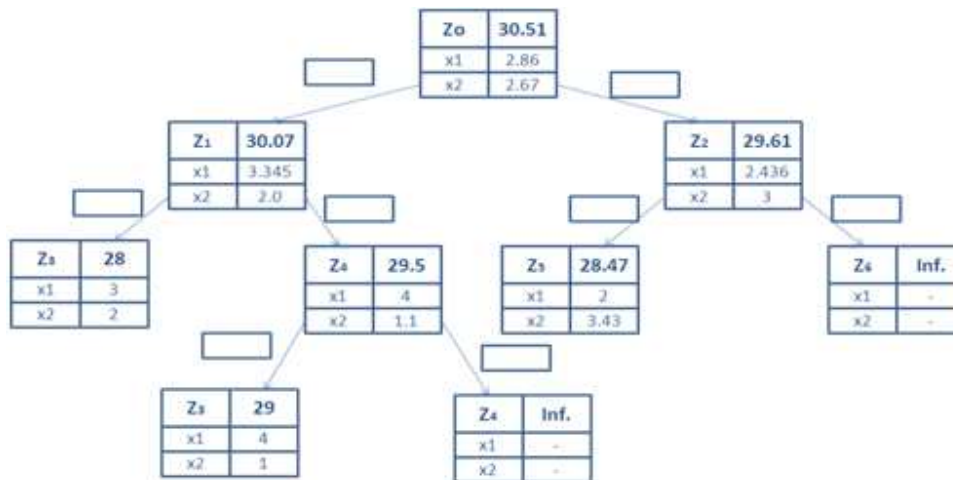
La región factible para Relajación Lineal (PL) se muestra el siguiente gráfico. A partir de ésta genere nuevas restricciones con el fin de encontrar la menor envoltura convexa del poliedro, de manera de asegurar que la solución óptima de PL sea la solución óptima de PE.



2. (3 Ptos.) Suponga que ha resuelto mediante B&B un problema de optimización *ENTERO*, PE.

$$\begin{aligned} \text{Máx.} \quad & 6x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} \quad & 100x_2 + 78x_1 \leq 490 \\ & 1375x_1 + 1000x_2 \leq 6600 \end{aligned}$$

El árbol final se muestra en la siguiente figura, considerando que se ramifico en profundidad y luego a lo ancho:



Justifique el árbol final obtenido, indicando las restricciones agregadas en cada ramificación, los criterios de poda utilizados, y los valores que toma el incumbente desde Zo hasta el término del algoritmo. ¿Cuál es el óptimo del problema?

3. (0,6 Ptos) Nombre los 3 criterios de detención de B&B.

Pregunta 3

Una empresa de telecomunicaciones debe diseñar su red de transmisión de datos. Existen un conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de nodos entre algunos de los cuales se originan flujos de datos. Específicamente,

existe un conjunto de pares $D = \{(r_i, s_i), i = 1, \dots, q\}$, donde r_i y $s_i \in N$. Entre cada uno de estos pares se

genera un requerimiento de flujo. Sea d_i la demanda por flujo, en Mb (Megabyte), que debe transmitirse entre los elementos del par i , $i = 1, \dots, q$, desde r_i hacia s_i (en algunos casos en D puede estar un par (r, s) y también el par (s, r) , indicando esto que hay requerimiento de flujo en ambos sentidos). No todos los nodos del conjunto N corresponden a puntos entre los que se generan o reciben comunicaciones, pero pueden ser utilizados como nodos “de paso”. Existe un costo fijo F_{ij} si se habilita una conexión de

comunicación entre los nodos i y j , con $i, j \in N$. Igualmente, existe un costo c_{ij} por cada Mb que se

transmita a través de la conexión entre el nodo i y el nodo j . La empresa no está dispuesta a incurrir en un costo variable total de flujo superior a C pesos. También, por diseño, la conexión $i-j$, si se habilita, tendrá una capacidad total de K_{ij} Mb.

Para incentivar la conexión del país, el gobierno ha decidido subsidiar el costo de instalación de ciertos

pares de flujo entre dos nodos correspondientes a $S = \{(r_i, s_i), i = 1, \dots, t\}$ (no necesariamente $S \subseteq D$), pero con la condición que al menos la mitad de los pares propuestos se habiliten.

Formule un modelo de programación lineal entera mixta que permita decidir cuáles conexiones deben ser habilitadas (construidas) de modo que se satisfaga la demanda por flujo de comunicaciones, no se exceda el presupuesto por costo de flujo, y que el costo total de habilitación sea mínimo.

PAUTA

Solución:

Pregunta 1

a)

Solución Básica Factible \Rightarrow Vértice

Sea x^* una solución básica factible, y sea $I = \{i | a'_i x^* = b_i\}$ y sea $c = \sum_{i \in I} a_i$. Luego tenemos

$$c'x^* = \sum_{i \in I} a'_i x^* = \sum_{i \in I} b_i$$

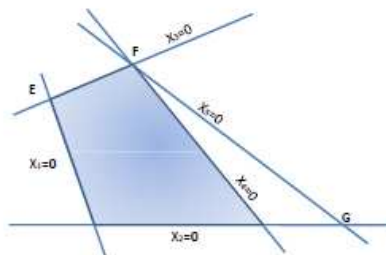
Más aún, para cualquier $x \in P$ y cualquier i , se tiene que $a'_i x \geq b_i$, y

$$c'x = \sum_{i \in I} a'_i x \geq \sum_{i \in I} b_i \quad (*)$$

Esto muestra que x^* es una solución óptima al problema de minimizar $c'x$ en el conjunto P . Más aún, la igualdad en (*) ssi $a'_i x = b_i$ para todo $i \in I$. Dado que x^* es una solución básica factible, existen n restricciones li activas en x^* , y x^* es la única solución al sistema de ecuaciones $a'_i x = b_i$, $i \in I$. Sigue que x^* es el único que minimiza $c'x$ en el conjunto P , por lo tanto x^* es un vértice de P .

b) Primera 0.5

En el caso que x sea una solución factible degenerada, v^i no siempre será factible. Es posible que alguna variable básica x_j sea 0, mientras que la correspondiente componente j de $v_B^i = -A_B^{-1} A_i$ sea negativa. En este caso, si se sigue la dirección básica i -ésima $x_B + \theta v_B^i$, la restricción de no negatividad de las variables básicas será violada y por ende estaremos en una solución infactible para el problema.



ptos

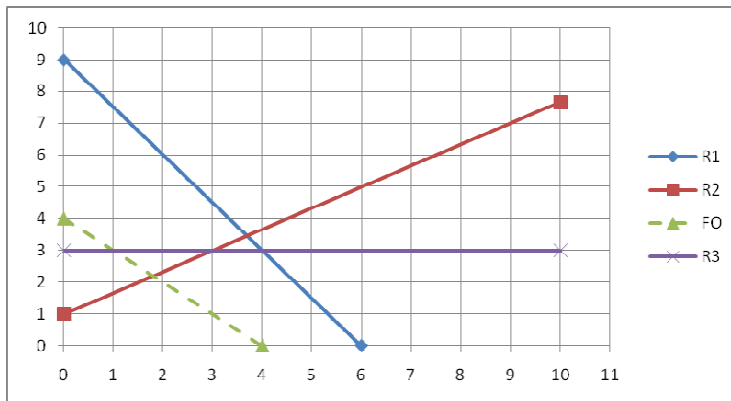
Segunda 0.7 pts

Dada una solución básica, demostramos optimalidad si todos los costos reducidos son positivos, aunque si ésta es degenerada lo anterior no necesariamente es cierto. Para encontrar una mejor solución, nos movemos a una solución básica adyacente, cómo? por ejemplo activando aquella variable no básica con mayor costo reducido!, como veremos que propone el algoritmo Simplex.

- c) Supongamos que el óptimo del primal es infinito (no acotado) y que el problema dual tiene una solución factible p . Por dualidad débil $c^T x \leq b^T p$ para toda solución del primal x . En particular $\infty \leq b^T p$, lo cual es imposible y prueba que el dual no puede tener solución factible.
- d) \bar{y} parece ser mejor solución ya que posee un buen comportamiento ante cambios en los valores de los parámetros, cambios que según los propios ingenieros son muy posibles. Además no es sólo que \bar{x} deje de ser óptimo, sino que por ejemplo ante cambios en un 1% de la demanda pasa a ser una pésima solución.
Ahora bien, si alguien argumento que prefiere \bar{x} ya que es una persona sumamente arriesgada y prefiere correr el riesgo, dar algo de puntaje. El problema es que es desde el punto de vista de la empresa o lo natural es que la empresa prefiera la opción del párrafo anterior.
- e) Hay que aplicar dijkstra tomando como origen la pizzería y como destino el lugar del pedido y luego aplicar dijkstra como origen el lugar del pedido y destino la pizzería. Finalmente se suman los valores. Notar que hay que hacer dijkstra para la ida y la vuelta, ya que en un dígrafo no necesariamente son iguales, 0,6 cada mención.

Pregunta 2

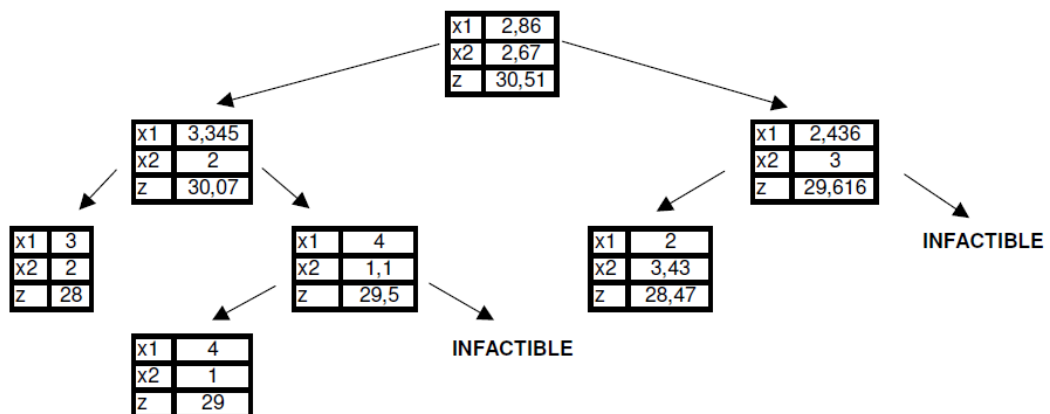
- a) Gráficamente se ve que el óptimo está en el punto entero (4,3) donde el valor de $Z=7$.
Para encontrar la menor envoltura convexa debemos modificar y agregar nuevas restricciones de manera que todos los puntos enteros del problema original estén contenidos en la envoltura.
 - 1. Cambiamos la pendiente de $R1$ de modo que pase por el punto (4,3)
 $R1: y + \frac{3}{2}x \leq 9$
 - 2. Cambiamos la pendiente de $R2$ hasta que toque al punto (3,3) (ojo que no pueden cambiarla hasta que pase por (4,3) pues dejan un punto entero fuera).
 $R2: y - \frac{2}{3}x \leq 1$
 - 3. Finalmente agregamos la restricción
 $R3: y \leq 3$



Con esto el poliedro queda:

Notar que pueden haber hecho otra envoltura, lo que importa es que envuelvan todos los puntos enteros del problema original. De lo contrario quitar **MITAD** del puntaje.

b) El árbol de B&B queda:



2.0 pts por las restricciones de cada nodo (poner las restricciones)

- P₁) $x_2 \leq 2$ $x_1 \approx 3,345; x_2 = 2; Z_2 \approx 30,07$
- P₂) $x_2 \geq 3$ $x_1 \approx 2,436; x_2 = 3; Z_2 \approx 29,616$
- P₃) $x_2 \leq 2$ $x_1 \leq 3$ $x_1 = 3; x_2 = 2; Z_3 = 28$
(no se sigue iterando) \Rightarrow *incumbente* : $Z_3 = 28$
- P₄) $x_2 \leq 2$ $x_1 \geq 4$ $x_1 = 4; x_2 = 1,1; Z_4 = 29,5$
- P₅) $x_2 \leq 2$ $x_1 \geq 4$ $x_2 \leq 1$ $x_1 = 4; x_2 = 1; Z_5 = 29$
(no se sigue iterando) \Rightarrow *incumbente* : $Z_5 = 29$
- P₅) $x_2 \leq 2$ $x_1 \geq 4$ $x_2 \geq 2$ infactible (no se sigue iterando)
- P₇) $x_2 \geq 3$ $x_1 \leq 2$ $x_1 = 2; x_2 = 3,34; Z_7 = 28,7$ Peor que el incumbente.
(no se sigue iterando)
- P₈) $x_2 \geq 3$ $x_1 \geq 3$ infactible (no se sigue iterando)

luego la solución óptima es: $x_1 = 4; x_2 = 1; Z = 29$

1.0 pto por el incumbente y óptimo.

La secuencia de valores para el incumbente son: $Z^* = -\infty, Z_2, Z_3$. El óptimo es el valor encontrado en el subproblema 5.

c) 0,2 cada una

- El problema en el nodo resulta infactible. Obviamente luego cualquier ramificación será infactible.
- La solución en el nodo es entera, por lo tanto cualquier ramificación no podría tener mejor solución entera.
- Si en un nodo el valor óptimo es z y el valor del incumbente es mejor (mayor o menor dependiendo del caso) , es claro que seguir ramificando va a dar soluciones enteras peores que el incumbente obtenido hasta el momento.

Pregunta 3

x_{ijk} = Flujo en Mb que circula entre i y j , correspondiente al par origen destino k .

$y_{ij} = 1$ Si se habilita la conexión (i, j)
0 si no

Llamaremos además:

d_k = Demanda por flujo que debe transmitirse por el par k

F_{ij} = Costo de habilitar la conexión entre i y j

c_{ij} = Costo unitario por transmitir entre i y j

C = Máximo costo variable en que está dispuesta a incurrir la empresa

K_{ij} = Capacidad total de la conexión (i, j)

F.O:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q x_{ijk} c_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ij} F_{ij} - \sum_{\substack{i=1 \\ (r_i, s_i) \in S}}^t y_{r_i s_i} F_{r_i s_i}$$

Satisfacer la demanda por flujo de comunicaciones:

$$\sum_{l=1}^n x_{lik} - \sum_{l=1}^n x_{ljk} = 0 \quad \forall l \neq r_k, s_k \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ljk} = d_k \quad l = r_k, \forall k$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ljk} = d_k \quad j = s_k, \forall k$$

Presupuesto de la empresa:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q x_{ijk} c_{ij} \leq C$$

Mitad de pares en S para el subsidio:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ (r_i, s_i) \in S}}^t y_{r_i s_i} \geq \frac{t}{2}$$

No pueda existir flujo entre i y j si la conexión (i, j) no está habilitada

$$\sum_{k=1}^q x_{ijk} \leq K_{ij} y_{ij} \quad \forall i, j$$

Naturaleza de las variables:

$$x_{ijk} \geq 0 \quad \forall i, j, k$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}$$