



INGENIERÍA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Daniel Espinoza
Gonzalo Romero
Auxiliares: Víctor Bucarey
Nelson Devia
Jocelyn González
Daniel Lillo
Fernando Solari

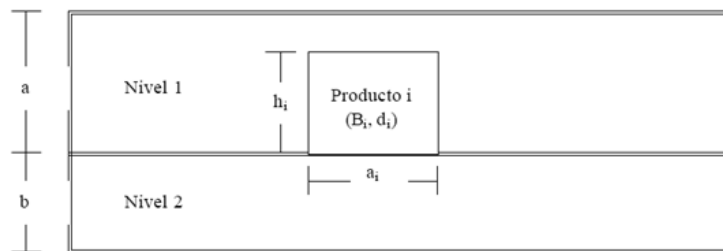
Examen IN3701

02 de julio del 2009

Pregunta 1

Considere que debe definir el contenido diario de las góndolas de un supermercado decidiendo los productos que debe incluir en ella. Para ello usted sabe que la góndola tiene 2 niveles (ver figura), cada uno de un alto a y b centímetros, respectivamente. Además, ambos niveles tienen un ancho de L cm. y una distancia de fondo de P cm.

Por otro lado usted cuenta con I tipos de productos distintos, los cuales tienen cada uno un cierto alto, ancho y fondo, los que se denotan por h_i , a_i y p_i con $i \in \{1 \dots n\}$, respectivamente. Cada producto puede estar presente sólo en uno de los dos niveles, y por razones de exposición de la marca sólo se pueden exponer apoyados en el ancho como se muestra en la figura.



Obviamente existen productos más rentables que otros, por lo cual cada producto tiene un beneficio neto unitario $B_i > 0$, el cual incluye todos los beneficios y costos asociados a la venta de una unidad de producto i .

Adicionalmente se requiere que exista un mínimo de MIN_i unidades de cada producto en las góndolas de modo de garantizar una variedad y disponibilidad adecuada hacia los clientes, y se debe considerar que la cantidad que existe en la bodega del supermercado de cada producto es BOD_i . Considere que por tratarse del problema diario de ubicación de productos en la góndola, no se alcanza a solicitar y recibir productos adicionales a las existencias en bodega, y para efectos de modelamiento suponga que no hay reposición de productos durante el día.

Suponga que todo lo que se coloca en la góndola se vende, hasta un límite que ha sido estimado por el departamento de marketing para cada producto en $DMAX_i$, y que no se puede poner un producto distinto detrás de otro ni tampoco sobre otro.

Por acuerdos comerciales con dos de los grandes productores de alimentos de lujo del país, los productos 1 y 2 deben estar en niveles distintos de la góndola en caso de exhibirse. Por otro lado, los productos 3 y 4 se venden en una oferta de pack, por lo que deben exponerse en el mismo nivel de la góndola.

Por acuerdos comerciales con la multinacional Lillo & Gamble, al considerar tres productos cualquiera del conjunto LG de sus productos al menos uno de ellos debe estar expuesto en el nivel superior.

Plantee un modelo de programación lineal entero mixto que permita encontrar la asignación de máximo beneficio de los distintos productos a la góndola teniendo en cuenta las características físicas de cada producto y de la góndola.

Pregunta 2

Para esta pregunta considere $f, g_i \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ y el problema

$$\min f(x) : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\text{con } g_i(x^*) \leq 0, \forall i = 1, \dots, m.$$

1. (2 ptos.) De un ejemplo de x^*, f, g_i donde las condiciones necesarias de primer orden de KKT se cumplen, pero donde x^* **no** sea un óptimo local.
2. (2 ptos.) De un ejemplo de x^*, f, g_i donde las condiciones necesarias de primer orden de KKT **no** se cumplen, pero donde x^* sea un óptimo local.
3. (2 ptos.) Demuestre que para un problema de optimización lineal en forma estándar $\min\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$ con solución óptima básica x^* , las condiciones de KKT se cumplen en x^* .

Pregunta 3

1. (4 ptos.) Considere que al utilizar el algoritmo de Branch & Bound en un problema de programación entera binario de minimización queda sólo un nodo por procesar. Sea este el nodo 21.

Suponga que al simplificar el problema reemplazando el valor de las variables que ya fueron fijadas en el proceso de *branching* que define el nodo considerado, obtenemos el siguiente problema con algunos parámetros sin especificar.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + 15 \\ \text{s.a.} \quad & a_1x_1 + a_2x_2 \geq 15 \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Suponga que el valor de la solución incumbente (o mejor solución factible encontrada hasta ahora) es 34 antes de procesar el nodo es 34.

Defina rangos para los parámetros c_1, c_2, a_1 y a_2 de modo que se cumplan las condiciones para cada uno de los casos posibles del algoritmo Branch & Bound, y enuncie las posibles conclusiones en cada caso. Suponga que los parámetros sólo toman valores enteros (Si no puede definir condiciones generales, dé un ejemplo concreto de valores para los parámetros para cada caso y las respectivas conclusiones para obtener la mitad del puntaje).

Hint: Recuerde que son 4 casos posibles a considerar.

2. (1 pto.) Ordene en términos de crecimiento asintótico las siguientes funciones:

$$n^2, \ln(n!), 2^{\ln(n)}, 2^n, n!, \ln(n), c.$$

3. (1 pto.) Dado $f, g : N \rightarrow \mathbb{R}_+$. Demuestre que $f(n) + g(n) = \Omega(\min\{f(n), g(n)\})$.



INGENIERÍA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs: Daniel Espinoza
Gonzalo Romero
Auxs: Víctor Bucarey
Nelson Devia
Jocelyn González
Daniel Lillo
Fernando Solari

Examen IN3701
02 de julio del 2009

Pregunta 1

Variables de decisión (0.8 ptos):

$$\begin{aligned}x_{ij} &:= \text{Unidades del producto } i \text{ incluidas en el nivel } j. & i \in \{1 \dots n\}, j \in \{1, 2\} \\z_{ij} &:= \text{Corridas del producto } i \text{ expuestas en el nivel } j. & i \in \{1 \dots n\}, j \in \{1, 2\} \\y_{ij} &:= \begin{cases} 1 & \text{si el producto } i \text{ se expone en el nivel } j. \\ 0 & \sim \end{cases}\end{aligned}$$

Restricciones (0.4 ptos c/u):

1. Naturaleza de las variables

$$\begin{aligned}x_{ij} &\in N_0^+ \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \quad \forall j \in \{1, 2\} \\z_{ij} &\in N_0^+ \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \quad \forall j \in \{1, 2\} \\y_{ij} &\in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \quad \forall j \in \{1, 2\}\end{aligned}$$

2. Cada producto puede estar presente solamente en un nivel de la góndola:

$$\sum_j y_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in \{1 \dots n\}$$

3. Definición de z_{ij} y ancho de la góndola no debe ser superado:

$$\begin{aligned}z_{ij} &\geq x_{ij} \cdot \frac{p_i}{P} \quad i \in \{1 \dots n\} \quad \forall j \in \{1, 2\} \\ \sum_i z_{ij} \cdot a_i &\leq L \quad \forall j \in \{1, 2\}\end{aligned}$$

4. Altura de cada nivel de la góndola no debe ser superada por la altura de ninguno de los productos asignados a ese nivel:

$$\begin{aligned}h_i &\leq a + M \cdot (1 - y_{i1}) \quad M \gg 1 \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \\ h_i &\leq b + M \cdot (1 - y_{i2}) \quad M \gg 1 \quad \forall i \in \{1 \dots n\}\end{aligned}$$

5. Consistencia en la definición de y_{ij} :

$$x_{ij} \leq M \cdot y_{ij} \quad M = \min\{BOD_i, DMAX_i\} \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

6. Respetar la cantidad en bodega:

$$\sum_j x_{ij} \leq BOD_i \quad \forall i \in \{1 \dots n\}$$

7. Cantidad máxima que se puede vender:

$$\sum_j x_{ij} \leq DMAX_i \quad \forall i \in \{1 \dots n\}$$

8. Satisfacción de variedad y disponibilidad mínima:

$$\sum_j x_{ij} \geq MIN_i \quad \forall i \in \{1 \dots n\}$$

9. Los productos 1 y 2 deben exponerse en distintos niveles, en caso de exhibirse:

$$y_{1j} + y_{2j} \leq 1 \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

10. Los productos 3 y 4 deben exhibirse en el mismo nivel de la gondola:

$$y_{3j} = y_{4j} \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

$$\sum_j x_{3j} \geq 1$$

$$\sum_j x_{4j} \geq 1$$

11. De cada tres productos en LG al menos uno de exponerse en el nivel superior:

$$\sum_{i \in S} x_{i1} \geq 1 \quad \forall S \subset LG : |S| = 3$$

Función Objetivo (0.8 ptos):

$$\text{máx} \quad \sum_{ij} x_{ij} \cdot B_i$$

Pregunta 2

1. Para este caso basta considerar un problema con un dominio no convexo, y definir un punto que cumpla KKT. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_2 \\ \text{s.a.} & x_2 \geq x_1^5 \\ & x_1, x_2 \in \Re \end{array}$$

En este caso el punto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ cumple las condiciones necesarias de primer orden de KKT, ya que

$$\lambda = 1 \text{ es tq. } -\nabla f(0, 0) = (0, -1) = \lambda(0, -1) = \lambda \nabla g(0, 0)$$

Pero no es minimo local, ya que al considerar cualquier $\epsilon > 0 \exists (\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) \in B((x_1, x_2), \epsilon)$ factible con $\widehat{x_2} < 0$ y $\widehat{x_2} \geq \widehat{x_1}^5$.

2. Para este caso basta considerar un problema que no cumpla la condición de calificación de restricciones. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 \\ \text{s.a.} & (x_1^2 + x_2^2 - 4)^2 = 0 \\ & x_1, x_2 \in \Re \end{array}$$

En este caso el punto $(x_1, x_2) = (-2, 0)$ claramente es óptimo local, pero no cumple las condiciones necesarias de primer orden de KKT. En efecto, $\nexists \lambda \text{ tq } \nabla f(-2, 0) = (1, 0) = \lambda(0, 0) = \lambda \nabla g(-2, 0)$

3. Primero reconocemos que cumple la condición de calificación de restricciones, es decir:

$$D := \{d : \nabla g_i(x^*) \cdot d \leq 0 \quad \forall i \in I(x^*)\}$$

En efecto, en el caso de un problema de optimización lineal vimos en clases que:

$$D := \{d : a_i \cdot d = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots m\}, \quad -e_i \cdot d \leq 0 \quad \forall i : x_i^* = 0\}$$

corresponde al conjunto de direcciones factibles.

Luego, reconociendo que $\nabla f = c$ y que $\nabla g_i = a_i$ para las restricciones de igualdad y $\nabla g_i = -e_i$ para las restricciones de desigualdad, podemos escribir

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i:i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*)$$

$$\Leftrightarrow -c = \sum_{i=1 \dots m} \lambda_i a_i - \sum_{i:x_i^*=0} \mu_i e_i$$

Luego, debemos demostrar que $\exists \mu \geq 0$ que cumple lo anterior. Al igual que en clases, separamos en costos básicos y no básicos. Considerando los costos básicos:

$$-c_B = \lambda A_B \Rightarrow -c_B A_B^{-1} = \lambda$$

es decir λ corresponde al vector de variables duales. Ahora, considerando los costos no básicos:

$$-c_N = \lambda A_N - \mu_N \Rightarrow \mu_N = c_N + \lambda A_N$$

y reemplazando el valor encontrado para λ :

$$\mu_N = c_N - c_B A_B^{-1} A_N \geq 0$$

ya que se trata precisamente de los costos reducidos, que deben ser no negativos por la condición de optimalidad de SIMPLEX.

Pregunta 3

1. Los casos del algoritmo B&B son los siguientes.

Nota de corrección: 1 punto para cada caso, dividido en 0.4 por la conclusion y 0.6 por el rango de las variables.

- a) **Nodo infactible: basta que a_1 y a_2 sean tales que $a_1 + a_2 \leq 14$** , por lo que el nodo recién procesado se elimina (deja de ser activo). **La conclusión del problema en este caso es que el valor óptimo de la función objetivo del problema es 34 (incumbente previo).**
- b) **Nodo con solución peor o igual que el incumbente:** basta que el valor de la función objetivo del problema del nodo 21 sea tal que $\lceil Z_{LP}(21) \rceil \geq 34$, por lo que el nodo recién procesado se elimina (deja de ser activo). Luego, se debe cumplir que $a_1 + a_2 \geq 15$ de modo de asegurar la factibilidad y con respecto a los otros parámetros:

- Si $c_1 \geq 0$ y $c_2 \geq 0$, suponemos sin pérdida de generalidad que $\frac{c_1}{a_1} \leq \frac{c_2}{a_2}$ luego tenemos los siguientes sub-casos:
 - Si $a_1 \geq 15 \Rightarrow x_1 = \frac{15}{a_1}, x_2 = 0 \Rightarrow Z_{LP}(21) = 15 + c_1 \cdot \frac{15}{a_1}$
 - Si $a_1 < 15 \Rightarrow a_2 \geq 15 - a_1, x_1 = 1, x_2 = \frac{15-a_1}{a_2} \in (0, 1] \Rightarrow Z_{LP}(21) = 15 + c_1 + c_2 \cdot \frac{15-a_1}{a_2}$.
- Sin pérdida de generalidad, si $c_1 < 0$ y $c_2 \geq 0$, entonces $x_1 = 1, x_2 = \max\{\frac{15-a_1}{a_2}, 0\} \Rightarrow Z_{LP}(21) = 15 + c_1 + c_2 \cdot \max\{\frac{15-a_1}{a_2}, 0\}$.
- Si $c_1 < 0$ y $c_2 < 0$, este caso no puede darse ya que siempre se tendría $x_1 = x_2 = 1 \Rightarrow Z_{LP}(21) = 15 + c_1 + c_2 < 34$.

Por lo tanto, la condicion requerida para este caso es cualquiera de las siguientes:

- $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, \frac{c_1}{a_1} \leq \frac{c_2}{a_2}, a_1 \geq 15$ y $c_1 \cdot \frac{15}{a_1} > 18$
- $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, \frac{c_1}{a_1} \leq \frac{c_2}{a_2}, a_1 < 15, a_1 + a_2 \geq 15$ y $c_1 + c_2 \cdot \frac{15-a_1}{a_2} > 18$
- $c_1 < 0, c_2 \geq 0, a_1 + a_2 \geq 15$ y $c_1 + c_2 \cdot \max\{\frac{15-a_1}{a_2}, 0\} > 18$

La conclusión del problema en este caso es que el valor óptimo de la función objetivo del problema es 34 (incumbente previo).

- c) **Nodo con solución entera mejor que el incumbente:** basta que el valor de la función objetivo del problema del nodo 21 sea tal que $Z_{LP}(21) \leq 33$ y sea entera, por lo que se actualiza el incumbente y el nodo recién procesado se elimina (deja de ser activo). Luego, se debe cumplir que $a_1 + a_2 \geq 15$ de modo de asegurar la factibilidad y con respecto a los otros parámetros:

- Si $c_1 \geq 0$ y $c_2 \geq 0$, suponemos sin pérdida de generalidad que $\frac{c_1}{a_1} \leq \frac{c_2}{a_2}$ luego tenemos los siguientes sub-casos:
 - Si $a_1 \geq 15 \Rightarrow x_1 = \frac{15}{a_1}, x_2 = 0$ por lo que para que la solución sea entera tenemos que imponer que $a_1 = 15 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow Z_{LP}(21) = 15 + c_1$
 - Si $a_1 < 15 \Rightarrow a_2 \geq 15 - a_1, x_1 = 1, x_2 = \frac{15-a_1}{a_2} \in (0, 1]$ por lo que para que la solución sea entera tenemos que imponer $a_1 + a_2 = 15 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow Z_{LP}(21) = 15 + c_1 + c_2$.
- Sin pérdida de generalidad, si $c_1 < 0$ y $c_2 \geq 0$, entonces $x_1 = 1, x_2 = \max\{\frac{15-a_1}{a_2}, 0\}$. Luego, para que la solución sea entera debemos imponer alguno de los siguientes sub-casos:
 - Si $a_1 \geq 15 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow Z_{LP}(21) = 15 + c_1 < 33$.

- Si $a_1 < 15$ debemos imponer $a_1 + a_2 = 15 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow Z_{LP}(21) = 15 + c_1 + c_2$.
- Si $c_1 < 0$ y $c_2 < 0$, este caso siempre se cumple ya que siempre se tendría $x_1 = x_2 = 1 \Rightarrow Z_{LP}(21) = 15 + c_1 + c_2 < 34$.

Luego, las condiciones requeridas para este caso son cualquiera de las siguientes:

- $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, c_1 \leq 18, \frac{c_1}{a_1} \leq \frac{c_2}{a_2}$ y $a_1 = 15$. $Z_{LP}(21) = 15 + c_1$
- $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, c_1 + c_2 \leq 18, \frac{c_1}{a_1} \leq \frac{c_2}{a_2}, a_1 < 15$ y $a_1 + a_2 = 15$. $Z_{LP}(21) = 15 + c_1 + c_2$
- $c_1 < 0, c_2 \geq 0$ y $a_1 \geq 15$. $Z_{LP}(21) = 15 + c_1$
- $c_1 < 0, c_2 \geq 0, c_1 + c_2 \leq 18, a_1 < 15$ y $a_1 + a_2 = 15$. $Z_{LP}(21) = 15 + c_1 + c_2$
- $c_1 < 0, c_2 < 0$ y $a_1 + a_2 \geq 15$. $Z_{LP}(21) = 15 + c_1 + c_2$

La conclusión del problema en este caso es que el valor óptimo de la función objetivo del problema es el nuevo incumbente $Z_{LP}(21)$.

d) **Nodo con solución no entera mejor que el incumbente:** basta que el valor de la función objetivo del problema del nodo 21 sea tal que $\lceil Z_{LP}(21) \rceil < 34$ y no sea entera, por lo que el nodo recién procesado no se puede eliminar, en cambio a partir de él se generan 2 nodos hijos según las reglas de branching y se agregan al árbol para continuar con algoritmo de B&B. Luego, se debe cumplir que $a_1 + a_2 \geq 15$ de modo de asegurar la factibilidad y con respecto a los otros parámetros:

- Si $c_1 \geq 0$ y $c_2 \geq 0$, suponemos sin pérdida de generalidad que $\frac{c_1}{a_1} \leq \frac{c_2}{a_2}$ luego tenemos los siguientes sub-casos:
 - Si $a_1 \geq 15 \Rightarrow x_1 = \frac{15}{a_1}, x_2 = 0$ por lo que para que la solución no sea entera tenemos que imponer que $a_1 > 15 \Rightarrow x_1 \in (0, 1) \Rightarrow Z_{LP}(21) = 15 + c_1 \cdot \frac{15}{a_1}$
 - Si $a_1 < 15 \Rightarrow a_2 \geq 15 - a_1, x_1 = 1, x_2 = \frac{15-a_1}{a_2} \in (0, 1]$ por lo que para que la solución no sea entera tenemos que imponer $a_1 + a_2 > 15 \Rightarrow x_2 \in (0, 1) \Rightarrow Z_{LP}(21) = 15 + c_1 + c_2 \cdot \frac{15-a_1}{a_2}$.
- Sin pérdida de generalidad, si $c_1 < 0$ y $c_2 \geq 0$, entonces $x_1 = 1, x_2 = \max\{\frac{15-a_1}{a_2}, 0\}$. Luego, para que la solución no sea entera debemos imponer $a_1 < 15$ y $a_1 + a_2 > 15 \Rightarrow x_2 = \frac{15-a_1}{a_2} \in (0, 1) \Rightarrow Z_{LP}(21) = 15 + c_1 + c_2 \cdot \frac{15-a_1}{a_2}$.
- Si $c_1 < 0$ y $c_2 < 0$, este caso no se puede cumplir ya que siempre se tendría $x_1 = x_2 = 1$.

Por lo tanto, la condición requerida para este caso es cualquiera de las siguientes:

- $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, \frac{c_1}{a_1} \leq \frac{c_2}{a_2}, a_1 > 15, c_1 \cdot \frac{15}{a_1} \leq 18$
- $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, \frac{c_1}{a_1} \leq \frac{c_2}{a_2}, a_1 < 15, a_1 + a_2 > 15$ y $c_1 + c_2 \cdot \frac{15-a_1}{a_2} \leq 18$
- $c_1 < 0, c_2 \geq 0, a_1 < 15$ y $a_1 + a_2 > 15$ y $c_1 + c_2 \cdot \frac{15-a_1}{a_2} \leq 18$

En este caso no se puede concluir nada con respecto a la solución entera del problema, y es necesario procesar los nuevos nodos generados.

2. El orden asintótico de las funciones consideradas es:

$$c \leq \ln(n) \leq 2^{\ln(n)} \leq \ln(n!) \leq n^2 \leq 2^n \leq n!$$

3. Claramente $f(n) + g(n) \geq 2\min\{f(n), g(n)\}$, ya que, sin pérdida de generalidad, si $g(n) \leq f(n) \Rightarrow f(n) + g(n) \geq 2g(n) \Rightarrow f(n) + g(n) = \Omega(\min\{f(n), g(n)\})$.