

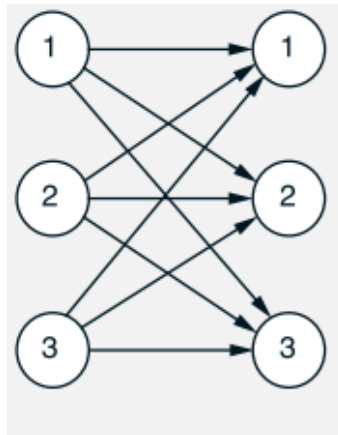
IN3701 – Modelamiento y Optimización Control 4

Problema 1

- (2.5 pts) Considere el problema minimizar el coste del abastecimiento a una serie de puntos de demanda a partir de un grupo de puntos de oferta. Se tienen N puntos de oferta y demanda. Sea $a_i \geq 0 \forall i \in N$ la oferta del nodo i , y $b_j \geq 0 \forall j \in N$ de demanda del nodo j . Además se conocen los costos $c_{ij} \forall i, j \in N$ por unidad enviada desde i a j y la capacidad máxima de las rutas $u_{ij} \forall i, j \in N$. Modele el Grafo y formule el problema como Flujo a Costo Mínimo.

R:

El problema queda como (todo nodo de oferta se conecta con todo de demanda):



$$\min \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{\substack{j \\ (i,j) \in A}} x_{ij} \leq a_i \quad \forall i: 1 \dots n$$

$$\sum_{\substack{i \\ (i,j) \in A}}^n x_{ij} \leq b_i \quad \forall i: 1 \dots N$$

$$x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall i: 1 \dots N \quad \forall j: 1 \dots N$$

Otra opción puede ser:

Sujeto a:

$$\sum_{\substack{i \\ (i,j) \in A}}^n x_{ij} = a_j \quad \forall j: 1 \dots N$$

$$\sum_{\substack{j \\ (i,j) \in A}}^n x_{ij} = b_i \quad \forall i: 1 \dots N$$

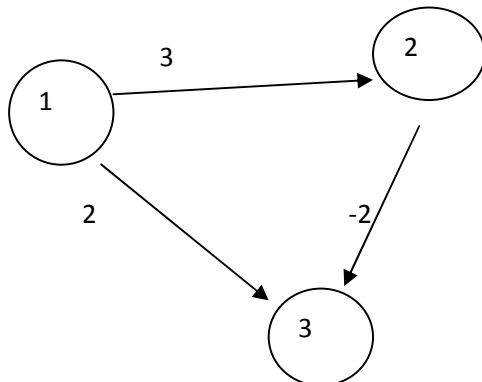
$$x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall i: 1 \dots N \quad \forall j: 1 \dots N$$

Pero acá para que sea factible hay que agregar:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$$

2. (1.0 pts) Muestre un ejemplo donde el algoritmo Dijkstra no encuentra la ruta más corta. Defina el grafo y sus parámetros y luego aplique el algoritmo para argumentar lo pedido.

R: La idea es que si existe un arco de longitud negativa el algoritmo no considera la posibilidad de cambiar la etiqueta a algún nodo ya visitado, se puede apreciar que al partir desde el nodo 1, el algoritmo indicará que se debe avanzar al nodo 3, luego al nodo 2 (también desde el 1). Luego, para ir al nodo 3 desde el nodo 2 se disminuirá el costo en -2, dando un total de 1 contra 2 que es el valor encontrado por el algoritmo. En el ejemplo $G(N,A)$ donde $N=\{1,2,3\}$ nodos, y $A=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ arcos. (en enunciado piden realizar dijkstra)



3. (1.5 pts) Considere $G(V, E)$ un grafo no dirigido, y $C: E \rightarrow \mathbb{R}$, y considere la transformacion a $G' = (V, E')$ donde $E' = \{(u, v), (v, u) : \{u, v\} \in E\}$ y con $C': E' \rightarrow \mathbb{R}$ como $C'((u, v)) = C(\{u, v\})$. Demuestre que el problema del camino mínimo en G puede resolverse como el problema del camino minimo en G' . Bajo que condiciones en la función de costo c podemos usar Dijkstra en G', C' ?
4. (1.0 pts) Para el problema de Máximo Flujo. Considere un Flujo x factible para el problema. Muestre que para un corte $Q=[S, V-S]$ se cumple

$$F(Q) = \sum_{(i,j) \in Q^+} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in Q^-} x_{ij} = \sum_{i \in S} y_i$$

Y que el máximo flujo $F^* \leq C(Q) \forall Q$ con $C(Q)$ la capacidad del corte Q .

R: Tomamos un grafo $G(N, A)$:

Sabemos que: Tenemos el flujo a través del corte:

$$F(Q) = \sum_{(i,j) \in Q^+} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in Q^-} x_{ij}$$

Y esto podemos reescribirlo como:

$$F(Q) = \sum_{i \in S} \left(\sum_{\substack{j \\ (i,j) \in A}} x_{ij} - \sum_{\substack{j \\ (j,i) \in A}} x_{ji} \right)$$

Lo que es sacar el flujo saliente-entrante por nodo. Y aca llegamos a la definición de divergencia. Luego:

$$F(Q) = \sum_{i \in S} y_i$$

Lo anterior ocurre siempre cuando (no es necesario aclarar esto)

$$\sum_{i \in N} y_i = 0$$

Para lo del corte: dadas las cotas $b_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij}$ definimos la capacidad del corte no vacío Q como:

$$C(Q) = \sum_{(i,j) \in Q^+} c_{ij} - \sum_{(i,j) \in Q^-} b_{ij}$$

Entonces, dadas, las cotas, $F(Q) \leq C(Q) \forall Q$ y F máximo está acotado cuando C(Q) es mínimo. Por tanto $F^*(Q) \leq C(Q)$

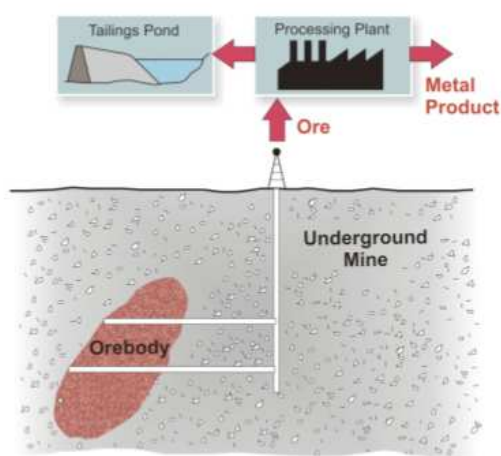
Problema 2

Una importante minera “Kiwi y Asociados” está trabajando en su plan de extracción. Para ello la mina está organizada en bloques de extracción, los que son de dos tipos: **mineral** y **estéril**, siendo **BM** el conjunto de bloques de mineral y **BE** los de estériles. Se sabe que el volumen del bloque de **mineral** i es V_i y un costo de CE_i . Análogamente existe un costo para la extracción del bloque **estéril** j de CE_j cuyo volumen es V_j . A su vez, se sabe que la extracción del bloque i de **mineral** genera un beneficio de $B_i = PV_i A_i - CE_i$. Donde P representa el precio del cobre, V_i volumen del bloque i y A_i la fracción de cobre del bloque i.

Por restricciones de accesibilidad cada bloque de **mineral** i tiene un conjunto de bloques de **mineral** que es necesario extraer antes de poder ser extraído, este conjunto de bloques se denomina I_i . Además por consideraciones de estabilidad geológicas, para cada bloque a extraer hay un conjunto de bloques que no pueden ser extraídos, denominado E_i . Análogamente para cada bloque i, de **mineral**, existe un conjunto $Q(i)$ de los bloques **estéril** que son necesarios para extraer el bloque de **mineral** i. Además por maquinaria, no es posible extraer más de E bloques.

Dentro del plan de extracción es necesario instalar botaderos de material estéril, para ello se cuenta con L posibles localizaciones. La minera ha estimado una capacidad máxima (en volumen) que es posible depositar en cada uno Cap_l . Los costos de instalación de cada botadero se han estimado en CI_l y el costo de transporte desde la mina al botadero l como CT_l , por limitaciones operacionales no es posible instalar más de B botaderos, para tener una cantidad manejable operacionalmente. También hay que considerar que lo que no es cobre de los bloques de mineral, no va a botadero.

Sabiendo que la empresa no desea extraer más de K (volumen) de cobre como producto final, y que desea satisfacer la demanda de cobre D, formule un problema de programación lineal de modo de ayudar a la empresa a obtener un plan de extracción y a maximizar sus utilidades.



	x	x	x	x
	y	i	x	
y	y			

	y	i		
y	y			

* Bloques x se deben extraer para sacar el bloque i

Solución:

Variables de decisión

Considerar también el caso que usan una sola variable (no lo hice pero hay que ponerlo)

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{si se extrae bloque } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se extrae bloque } i \text{ (mineral)} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Creo que es más aconsejable tenerlo separado, la mayoría lo tienen así

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si extraigo bloque } j \text{ (estéril)} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$u_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{si envío bloque } j \text{ a botadero } l \\ 0 & \end{cases}$$

$$v_l = \begin{cases} 1 & \text{si instalo botadero } l \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$w_l = \text{Cantidad de bloques que envío a botadero } l$$

Obs: se puede trabajar con z_i en vez de x_i e y_i , y con y_{jl} si extraigo el bloque i y lo envío al botadero l .

Restricciones

1) Naturaleza:

$$x_i, y_{jl}, v_l, u_{jl} \in \{0,1\} w_l \in N$$

2) Bloques necesarios para extraer el bloque i:

Caso1: mantienen enunciado original (2 formas equivalentes, basta tener una):

$$x_i \leq x_k \quad \forall i, \quad \forall i \in BM \quad \forall k \in I_i$$

$$\sum_{k \in I_i} x_k \geq x_i |I_i| \quad \forall i \in BM \quad \forall k \in I_i$$

Caso 2: Asumen cambio en el enunciado y tenían dos variables para decidir qué bloques sacar (2 formas equivalentes, basta tener una):

$$y_j \leq x_k \quad \forall j \in BE, \quad \forall j \in BE \quad \forall k \in I_j$$

$$\sum_{k \in I_j} x_k \geq y_j |I_j| \quad \forall j \in BE, \quad \forall k \in I_j$$

3) Bloques que no se pueden extraer si extraigo bloque i

$$x_i \leq 1 - x_k \quad \forall i \in BM \quad \forall k \in E_i$$

$$x_i \leq 1 - y_k \quad \forall i \in BM \quad \forall k \in E_i$$

Ahora esta misma para las variables "y" pues el E_i está definido para cualquier i, sea mineral o sea estéril.

$$y_j \leq 1 - y_k \quad \forall j \in BE \quad \forall k \in E_i$$

$$y_j \leq 1 - x_k \quad \forall j \in BE \quad \forall k \in E_i$$

(obs: Considerar que si tomaron una variable z_i lo anterior puede quedar escrito en 1 restricción)

4) Instalo a lo más B botaderos

$$\sum_{l \in L} v_l \leq B$$

- 5) Enviado a botadero l es menor que la capacidad, y si envió entonces construyo (puede estar separado en 2 restricciones)

$$w_l \leq Cap_l \quad \forall l \in L$$

- 6) Recuperación de cobre de al menos k y mayor a demanda:

$$D \leq \sum_{i \in BM} A_i V_i x_i \leq K$$

- 7) Capacidad extracción:

$$\sum_{i \in BM} x_i + \sum_{j \in BE} y_j \leq E$$

- 8) Relación entre variables:

$$w_l = \sum_{j \in BE} V_j u_{jl}$$

- 9) Mando a botadero solo si saque el bloque

$$u_{jl} \leq y_j \quad \forall j \in BE, l \in L$$

$$y_j = \sum_{l \in L} u_{jl} \quad \forall j \in BE$$

- 10) Estéril necesario para extraer bloque:

$$\begin{aligned} x_i &\leq y_k \quad \forall i \in BM, \quad \forall k \in Q(i) \\ y_j &\leq y_k \quad \forall j \in BE, \quad \forall k \in Q(j) \end{aligned}$$

Función objetivo:

maximizar utilidades (Sólo lo que saco de estéril va a botadero y tiene un costo asociado, lo que mando a planta, proceso y no es cobre no va a botadero)

$$\max \left(\sum_{i \in BM} P * A_i * V_i * x_i - \sum_{l \in L} C_{I_l} * v_l - \sum_{l \in L} C_{T_l} * w_l - \sum_{i \in BM} C_{E_i} * x_i - \sum_{j \in BE} [y_j * C_{E_j}] \right)$$

Obs: Si no asumieron que el costo de transporte era por cantidad de estéril (volumen), y ese costo no considera V_i y queda como:

$$\sum_{i \in L} \sum_{j \in BE} CT_{ij}$$

Pauta:

1 punto variables

1 Punto Función Objetivo.

Todas las restricciones valen 0,4