INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Richard Weber, Rodrigo Wolf
Coordinador: Daniel Lillo
Auxiliares: Victor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 7
21 de Octubre, 2010

Problema 1

Don Zippy, un humilde y emprendedor microempresario, está planeando adquirir la Franquicia de la prestigiosa cadena de comida rápida estadounidense “McChrono”. Don Zippy tiene todo listo: la negociación está en una etapa avanzada, por lo que desea desde ya saber cuántas unidades de cada una de sus hamburguesas va a producir.
La franquicia le da derecho a producir 2 de las hamburguesas de McChrono: “McChrono Salvaje” y “McChrono Extra Queso”. Cada unidad de McChrono Salvaje requiere de 3 hamburguesas para su preparación, mientras que una unidad de McChrono Extra Queso requiere solo una. Asimismo, una unidad de McChrono Salvaje necesita de 2 láminas de queso, mientras que una de McChrono Extra Queso requiere de 5 laminas. Don Zippy considera que los demás ingredientes son despreciables para su cálculo, y cuenta con un total de 200 hamburguesas y 300 laminas de queso.
Don Zippy planea vender cada unidad de McChrono Salvaje en $1000, mientras que cada unidad de McChrono Extra Queso costara $1500.
1) (0,5 pts.) Plantee el modelo de programación lineal entera que debe resolver Don Zippy para maximizar sus ingresos.
2) (2,5 pts.) Entregue la solución del problema usando el algoritmo de Branch & Bound, justificando por que dejo de ramificar en cada nodo.
Don Zippy debe viajar a Estados Unidos para cerrar el trato con los ejecutivos de McChrono. El microempresario ya ha empacado gran parte de sus pertenencias, pero aun le queda una mochila pequeña de 3 litros de capacidad, y debe decidir que artículos llevara en ella. Los artículos que podría llevar en la mochila son: Su desodorante favorito que ocupa 0,3lt, su notebook que ocupa 2lt, un libro que ocupa 1,1 lt y una radio que ocupa 1,4lt.
Considere que las utilidades de llevar cada artículo son 2, 9, 3 y 5, respectivamente.
3) (0,5 pts.) Plantee el modelo de programación lineal entera que ayude a Don Zippy a decidir que artículos llevar en su viaje.
4) (2,5 pts.) Entregue la solución del problema usando el algoritmo de Branch & Bound, justificando por que dejo de ramificar en cada nodo.

Problema 2

Un estudiante de ingeniería de una prestigiosa universidad ha descubierto su nueva pasión: Los juegos de rol en línea. Hace unas semanas ha comenzado a jugar WoB (World of Beauchef), donde ha creado un poderoso caballero al que ha llamado Chrono.
Nuestro amigo estudiante debe compatibilizar sus estudios con el juego, las cuales supondremos que son las únicas 2 actividades que realiza.
El estudiante sabe que cada hora gastada en el juego le genera 2 unidades de cansancio, mientras que una hora de estudio le genera 5 unidades. El médico le recomendó no cansarse más de 43 unidades en un día.
Nuestro amigo debe dormir al menos 8 horas, por lo que cuenta con un máximo de 16 horas para realizar ambas actividades durante el día.

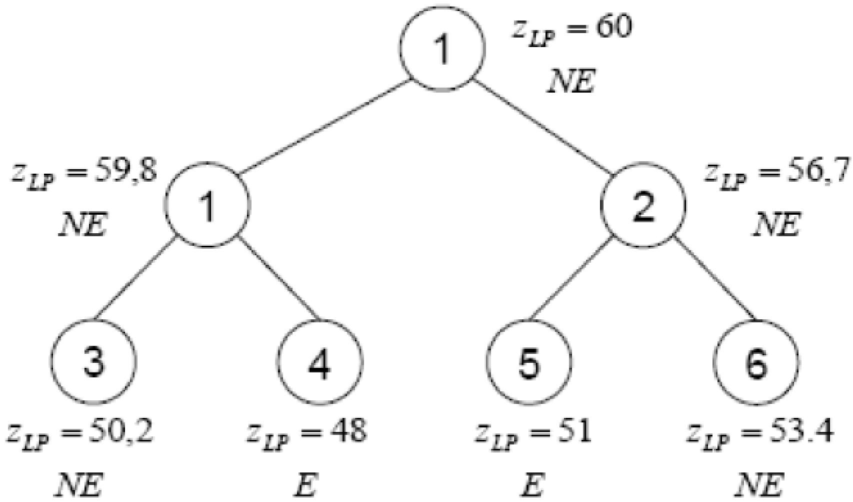
Cada hora gastada jugando le genera 3 unidades de felicidad, mientras que cada hora invertida en estudiar le reporta 5 unidades, pues sabe que estudiar es muy importante para su futuro como ingeniero. Considere también que una fracción de hora gastada en estas actividades no le genera felicidad alguna.

1) Plantee el modelo de programación lineal entera que debe resolver el estudiante para maximizar su felicidad.

2) Entregue la solución del problema usando el algoritmo de Branch & Bound (Ramificación y acotamiento).

Problema 3

Un problema de programación entera se está resolviendo utilizando el algoritmo de *Branch and Bound*. A continuación se presenta el árbol de problemas que se tiene hasta la iteración actual. El primer problema representa la relajación lineal del problema entero original y el resto corresponde a sus ramificaciones. Para cada sub-problema se tiene el valor óptimo de la función objetivo. Además, cada subproblema se identifica con *E* si su solución es entera (factible para el problema Original) y con *NE* en caso contrario.



1. ¿El árbol anterior corresponde a un problema de maximización o a uno de minimización? ¿Cual es el incumbente hasta la iteración actual?
2. ¿En las siguiente iteraciones, .que nodos seguiría ramificando y que nodos no seguiría ramificando? Explique.
3. De una cota superior y una inferior para el valor optimo de la función objetivo del problema entero original según la información que conoce hasta la iteración actual. Suponga que los coeficientes de la función objetivo son enteros.

Pauta

Problema 1

1) Variables de decisión:

X = Cantidad de hamburguesas McChrono Salvaje
Y = Cantidad de hamburguesas McChrono Extra Queso

Restricciones:

1. Carne:

$$3*X + Y \leq 200$$

2. Queso:

$$2*X + 5*Y \leq 300$$

3. Naturaleza de las variables

X, Y enteras positivas

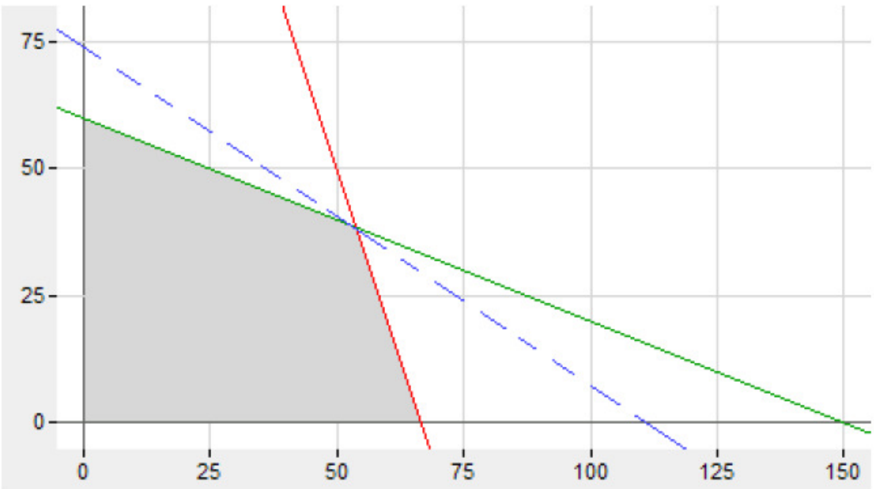
Función objetivo:

$$\text{Max } z = 1000*X + 1500*Y$$

2) Debemos resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 1000x + 1500y \\ \text{s.a.} \quad & 3x + y \leq 200 \\ & 2x + 5y \leq 300 \\ & x, y \text{ enteros positivos} \end{aligned}$$

Gráficamente:

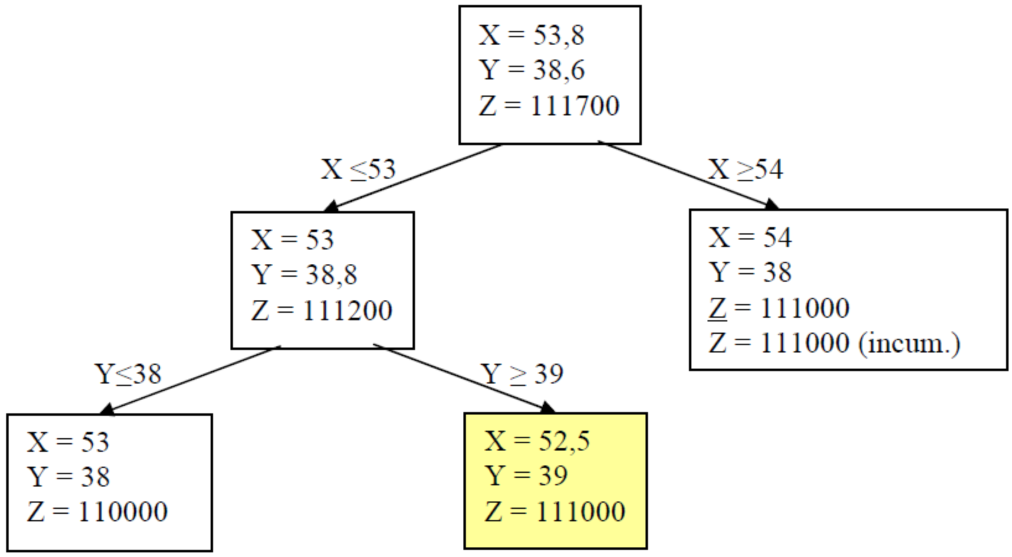


Primero se resuelve el problema relajado, que es la intersección de las dos restricciones, así se obtiene: X = 53,8 e Y = 38,6

Luego se proceda a la ramificación, comenzando con el incumbente $z= -\infty$.

La resolución se muestra en el árbol siguiente, es importante aclarar que cada nodo contiene además de la restricción que se especifica en el mismo, las restricciones de toda la rama superior a él.

La solución entera es X = 54, Y = 38 y Z = 111000.



Observaciones:

1.- En el nodo amarillo se dejó de ramificar pues en él, el valor de Z es igual que el incumbente.
2.- En los demás nodos se dejó de ramificar por haber llegado a una solución entera.
2.- Se puede comenzar a ramificar por la variable Y, y se debe llegar al mismo resultado.

3) Variables de decisión:

$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva el desodorante} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

$X_3 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva el libro} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva el notebook} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva la radio} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

Restricciones:

Capacidad.

$$0.3X_1 + 2X_2 + 1.1X_3 + 1.4X_4 \leq 3$$

Naturaleza de las variables.

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \in \{0,1\}$$

<u>Función objetivo</u>:

$$\text{Max}\{2X_1 + 9X_2 + 3X_3 + 5X_4\}$$

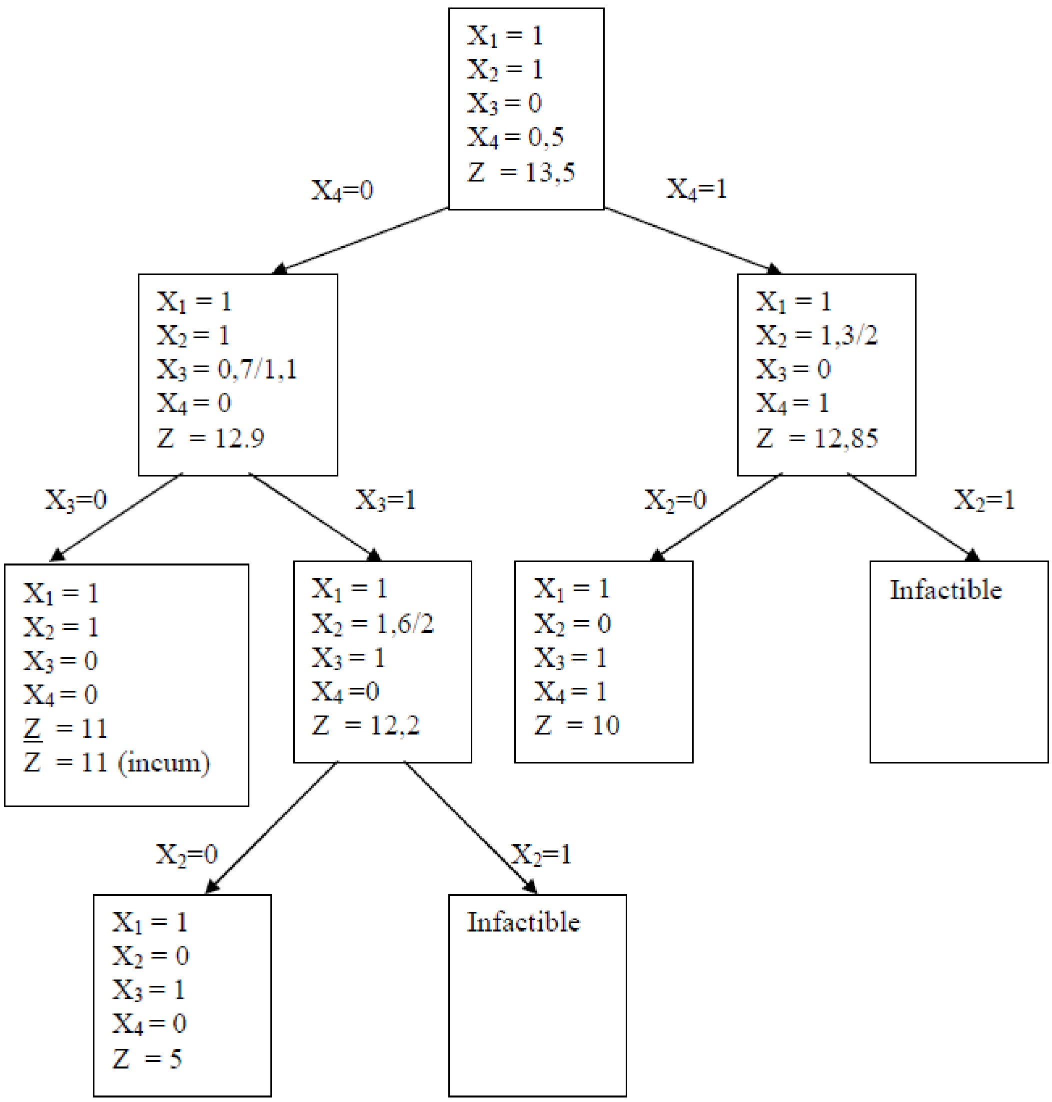
4) Debemos resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2X_1 + 9X_2 + 3X_3 + 5X_4 \\ \text{s.a.} \quad & 0.3X_1 + 2X_2 + 1.1X_3 + 1.4X_4 \leq 3 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Calculamos la relación beneficio/volumen para cada artículo:

Desodorante: 2/0,3 = 6,6
Notebook: 9/2 = 4,5
Libro: 3/1,1 = 2,7
Radio: 5/1,4 = 3,5

Para llenar la mochila, se meten primero los artículos de mayor relación beneficio/volumen. De aquí se obtiene la solución relajada, y el arbol queda como sigue:



El óptimo es llevar el desodorante y el notebook con un beneficio Z=11

Problema 2

1) Variables de decisión:

X = Cantidad de horas invertidas en el juego
Y = Cantidad de horas invertidas estudiando

Restricciones:

1. Cansancio:

$$2*X + 5*Y \leq 43$$

2. Máximo horas diarias:

$$X + Y \leq 16$$

3. Naturaleza de las variables

X, Y enteras

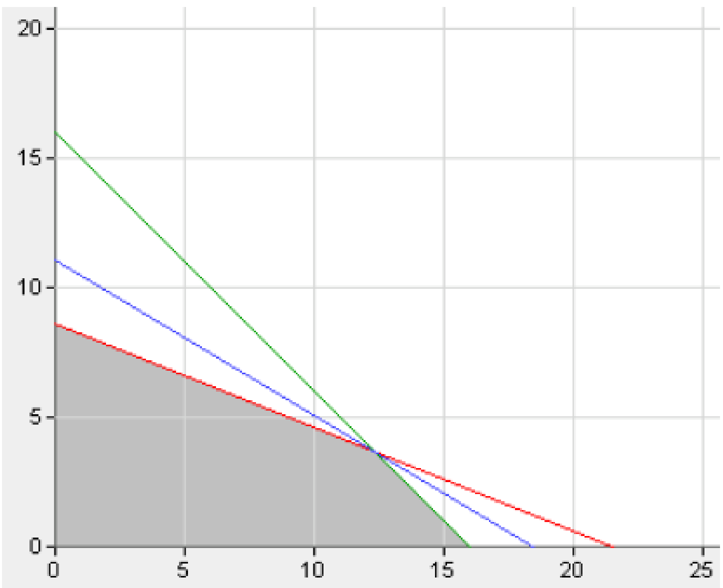
Función objetivo:

$$\text{Max } z = 3*X + 5*Y$$

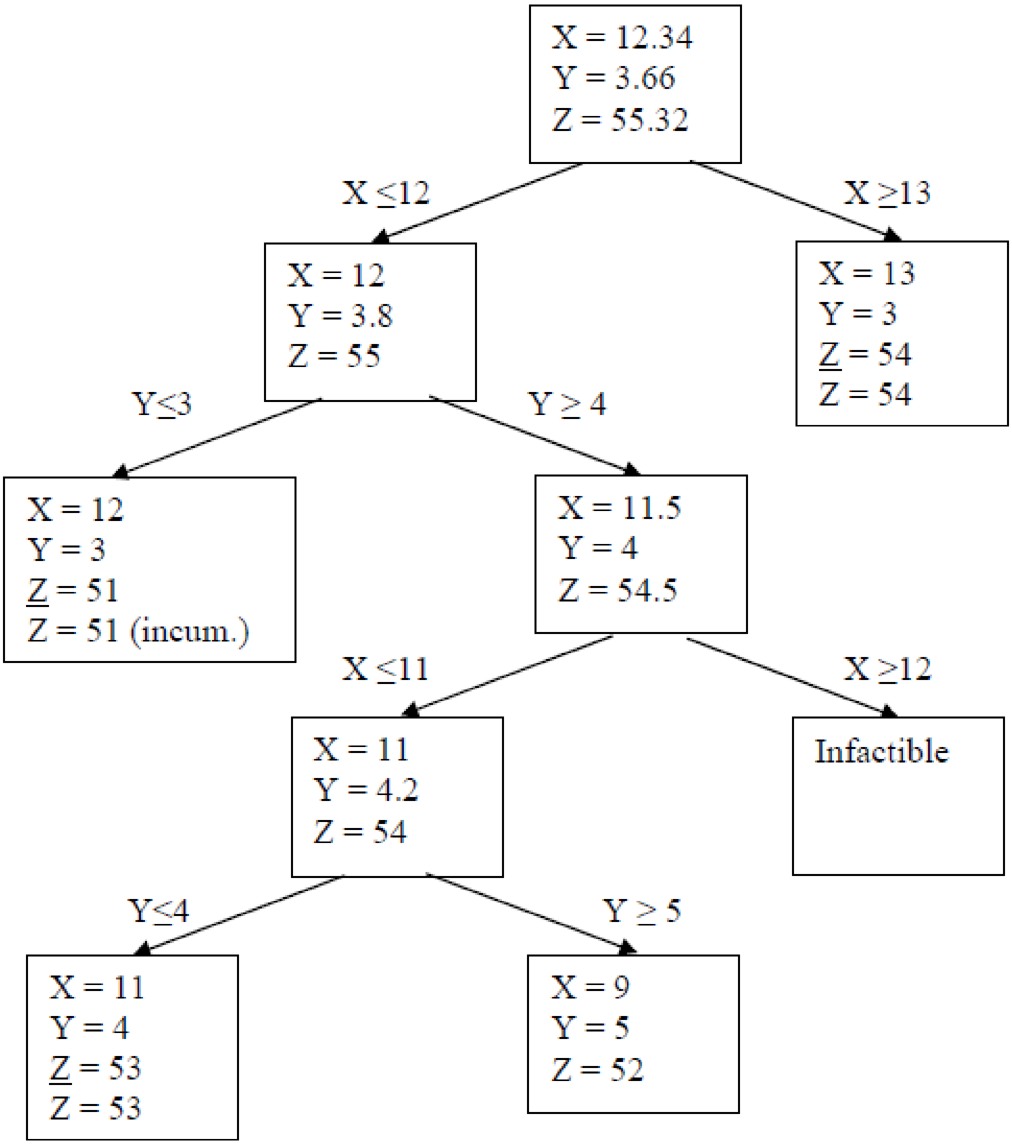
2) Debemos resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = 3x + 5y \\ &\text{s.a.} \quad 2x + 5y \leq 43 \\ &\qquad\quad x + y \leq 16 \\ &\qquad\quad x,\ y \text{ enteros} \end{aligned}$$

Gráficamente:



Primero se resuelve el problema relajado que es la intersección de las dos restricciones, con eso se obtiene X=12,34 e Y=3,66.
La resolución se muestra en el siguiente árbol, es importante aclarar que cada nodo contiene además la restricción que se especifica en el mismo, las restricciones de toda la rama superior.
La solución entera es X=13, Y=3 y Z=54.



Problema 3
1) Es un problema de maximización. El incumbente es 51
2) Solo el nodo 6, ya que el 3 y 4 tienen valores bajo el incumbente. Además, el nodo 4 ya arrojo una solución entera. El nodo 5, en tanto, arrojo solución entera (nuestro actual incumbente). En cambio, el nodo 6 posee un valor de la función objetivo mayor que el incumbente y su solución no es entera.
3) Cota superior 53 (la mejor solución entera posible si ramificáramos el nodo 6), Cota inferior 51 (incumbente).