INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Richard Weber, Rodrigo Wolf

Auxiliares: Victor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Control 2
7 de Octubre, 2010

Problema 1

1. Considere el siguiente problema (P):

$$
\begin{aligned}
&\min\{3x_1 + x_2\}\\
\text{s.a.}\quad & 4x_1 + 5x_2 \geq -20\\
& 2x_1 - 2x_2 \geq -5\\
& x_2 \geq -4\\
& x_1, x_2 \leq 0
\end{aligned}
$$

El gráfico respectivo está en anexos.

a) (0,5 pts.) Escriba el problema en forma estándar.

b) (1 pto.) ¿Cuáles de los puntos indicados en el gráfico[1] (A,B,C,D,E,F,G) son soluciones básicas del problema? ¿Cuáles de estas son factibles? Indique, sólo para las soluciones básicas factibles, cuáles son las bases asociadas a ellas.

c) (1 pto.) Suponga que tras alguna iteración del algoritmo SIMPLEX, se tiene la siguiente matriz básica A_B y matriz no básica A_N:

$$
A_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Con esta información, identifique a qué punto del gráfico corresponde esta base (argumente). Además, usando SIMPLEX, determine si estamos o no en el óptimo del problema, qué variable debe entrar y salir de la base, y cuál es el valor de las variables básicas y no básicas en el punto[2]. Concluya, usando estos resultados, si el punto tiene alguna característica especial.

2. (1 pts.) Sea P un polihedro. Demuestre que si x es solución básica factible, entonces x es un vértice de P.

Hint: *Utilice como función objetivo* $c'x$ *con* $c = \sum_{i \in I(x)} a_i$.

3. (1 pto.) Sea B una base asociada a la solución básica $x = (x_B, x_N)$ de un PPL en forma estándar.

a) ¿Qué condición tiene que cumplir x para que la solución básica sea factible?

b) ¿Qué significa si una componente del vector x_B sea 0? Muestre gráficamente un ejemplo para este caso.

[1] Ver gráfico en anexo 1
[2] Ver anexo 2 para inversa de matriz A_B

c) Durante la aplicación del algoritmo simplex ¿en qué criterio se detecta la existencia de este fenómeno?

4. (0,75 pts.) En clases vimos que, dado x asociado a una base B, entonces:

$$\begin{array}{lll} \min\{cx\} & & \min\{c_B\bar{b} + \bar{c}x_N\} \\ s.a.\ Ax = b \quad (P) & \Leftrightarrow & s.a.\ x_B + \bar{A}_N x_N = \bar{b} \quad (P') \\ \quad x \geq 0 & & \quad x \geq 0 \end{array}$$

Con esa información, argumente por qué el criterio de optimalidad de simplex es $\bar{c} \geq 0$.

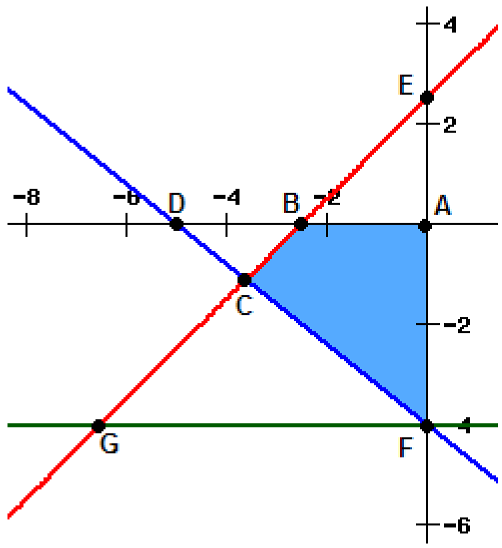
5. (0.75 pto.) Usted está resolviendo el problema de fase 1 de Simplex:

$$\begin{array}{l} \min\{w = \sum_{i=1}^{m} t_i\} \\ s.a.\ Ax + It = b, \qquad b \geq 0 \\ \quad x, t \geq 0 \end{array}$$

Y obtiene que la función objetivo es distinta de 0. ¿Por qué si ese es el caso entonces el problema original es infactible?

Anexos Pregunta 1:

Anexo 1: Gráfico problema 1 parte 1.



Anexo 2: Inversa de la matriz A_B del problema 1 parte 1.

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \\ 1/5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2

Su buen amigo David Piñeda, emprendedor microempresario, ha decidido comenzar un nuevo negocio: se dedicará a la elaboración y venta de "permufes", que son sucedáneos de perfumes pero con ingredientes de menor calidad para abaratar costos. Para esto, ha creado su nueva microempresa, llamada "Los Amigurumis".

Piñeda puede elaborar un conjunto N de distintos productos, para lo cual utiliza un conjunto M de insumos distintos. Para elaborar un litro del producto j $(j \in N)$, se necesitan a_{ij} mililitros (ml) del insumo i $(i \in M)$. El microempresario ha decidido, después de un intenso estudio de mercado, vender cada producto a un precio P_j por cada 100 ml.

Piñeda no tiene contacto con buenos proveedores, por lo que le ha pedido a su camarada Gonzalo Descortés que se los envíe desde la ZOFRI[1]. En cada período, la capacidad máxima de insumo i a pedir es de CAP_i ml y el costo por ml de insumos es de C_i. Además, existe un costo fijo de transporte CT, aunque si se lleva mas de $\overline{Q}$ litros se debe pagar una tasa TASA% adicional sobre CT por cada litro de insumos por sobre $\overline{Q}$. Considere que se cuenta con un presupuesto destinado a compra de insumos de PPTO para cada período del horizonte de evaluación T.

Para elaborar los permufes, su amigo puede seguir K procesos de producción distintos (cada proceso usa instrumentos diferentes, por ejemplo). Si se usa el proceso k $(k \in K)$ en el período t $(t \in T)$, se incurre en un costo fijo de producción CP_{jkt} para el producto j. Note que debe usar el mismo proceso para todos sus productos en cada período[2]. Sea $V_{kk'}$ un parámetro que vale 1 si el cambio del proceso k al proceso k' de un período al siguiente es compatible y 0 sino $(k, k' \in K)$.

Por otro lado, el microempresario sabe que hay sucedáneos de perfumes muy similares entre sí, por lo que si produce el permufe "Marshello" no puede producir "Crepúsculo" (para que no compitan entre sí). De la misma forma, hay permufes que se complementan muy bien, por lo que si decide producir el permufe "Caldo", debe producir también "Flores". Por último, y aunque Piñeda lo considera la mayor injusticia del mundo, su camarada Descortés le ha exigido (para devolverle el favor) que su permufe favorito "ZMRR" tenga una producción mayor al 25% del total.

Construya un modelo de programación lineal entera mixta, que ayude a su amigo a decidir cuántos litros de cada producto producir, de forma de maximizar las utilidades obtenidas. Suponga que no hay inventario de productos ni de insumos, es decir, se debe usar en un período todo lo que compró para producir y además todo lo producido se venderá.

---

[1] Zona Franca de Iquique.

[2] Por ejemplo, si en el período 1 decide usar el proceso 3, todos los productos se elaborarán con ese proceso. Luego, si para el período 2 elige el proceso 5, todos se producen con ese proceso, etc.

Solución:

Pregunta 1

Nota de corrección: *Ojo con los puntajes, no todas las preguntas valen lo mismo. El puntaje está detallado en el enunciado.*

1.

a. La forma estándar es:

$$\begin{aligned}
&\min\{-3x_1 - x_2\} \\
&\text{s.a.} \quad 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\
&\qquad\; 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 5 \\
&\qquad\; x_2 + x_5 = 4 \\
&\qquad\; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Nota de corrección: *Es probable que lleguen a esta misma expresión, pero con los signos de las restricciones cambiados, eso está ok (por eso mismo dimos la matriz A_B con los signos cambiados). En otras palabras, es como multiplicar por -1 todas las restricciones.*

b. TODOS los puntos representados en el gráfico (A,B,C,D,E,F,G) son soluciones básicas. De estos puntos, sólo A,B,C y F son factibles.
Se pide encontrar las bases sólo para las soluciones básicas factibles:

- Base punto A: $X_B=\{X_3,X_4,X_5\}$ y $X_N=\{X_1,X_2\}$ => B={3,4,5}
- Base punto B: $X_B=\{X_1, X_3,X_5\}$ y $X_N=\{X_2,X_4\}$ => B={1,3,5}
- Base punto C: $X_B=\{X_1,X_2,X_5\}$ y $X_N=\{X_3,X_4\}$ => B={1,2,5}
- Base 1 punto F: $X_B=\{X_2,X_4,X_5\}$ y $X_N=\{X_1,X_3\}$ => B={2,4,5}
- Base 2 punto F: $X_B=\{X_2,X_3,X_4\}$ y $X_N=\{X_1,X_5\}$ => B={2,3,4}
- Base 3 punto F: $X_B=\{X_1,X_2,X_4\}$ y $X_N=\{X_3,X_5\}$ => B={1,2,4}

Notar que el punto F tiene 3 bases pues es un punto degenerado, deben describirlas todas. Basta con que muestren las variables básicas para identificar la base.

c. Con las matrices entregadas se ve que estamos en el punto F del gráfico. El argumento puede ir por el lado de señalar a qué base corresponden las matrices, mirando sus columnas. En este caso, la base es (en el mismo orden de las columnas) B={4,5,2} y N={3,1}, que como vimos en la parte b es la que describimos como base 1 del punto F.

Usemos simplex:

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \\ 1/5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(lo de arriba está dado en el anexo)

$$A_N = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A}_N = A_B^{-1} * A_N = \begin{pmatrix} 2/5 & 16/5 \\ -1/5 & -4/5 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{b} = A_B^{-1} * b = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, los costos reducidos:

$$\overline{C_N} = C_N - C_B * \overline{A_N}$$
$$\overline{C_N} = (0 \quad -3) - (0 \quad 0 \quad -1) * \overline{A_N}$$
$$\overline{C_N} = (0 \quad -3) - (-\tfrac{1}{5} \quad -\tfrac{4}{5}) = (\tfrac{1}{5} \quad -\tfrac{11}{5})$$

(Notar que deben usar los costos de la forma estándar).

Como no todos los costos reducidos son positivos, entonces a priori no estamos en el óptimo del problema, simplex seguirá iterando.

Criterio de entrada: Entra la variable asociada al costo reducido más negativo, por lo tanto **entra X_1**

Criterio de salida: Sale la variable asociada a:

$$\min_{\bar{a}is \geq 0}\{\frac{13}{16/5} \quad \frac{0}{-4/5} \quad \frac{4}{4/5}\} = \min_{\bar{a}is \geq 0}\{65/16 \quad - \quad 5\}$$ => **Sale X_4**

Los valores de las variables en este punto son:

$$X_B = \overline{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ y } X_N = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por último, dado que hay un valor 0 en el vector b barra, se puede concluir que el punto es degenerado.

Nota de corrección: *Fíjense que si escribieron la forma estándar con los signos cambiados, usarán la matriz A_B con los signos cambiados. Los cálculos son los mismos y los resultados también, pero ojo con eso pues habrán algunos signos distintos en el desarrollo (está bien).*

2. Solución básica => vértice:

Sea x* una solución básica factible, y sea I={i|a_i'x*=b_i} y sea $c = \sum_{i \in I} a_i$. Luego, tenemos:

$$c' x^* = \sum_{i \in I} a_i ' x^* = \sum_{i \in I} b_i$$

Más aún, para cualquier $x \in P$ y cualquier i, se tiene que $a_i ' x \geq b_i$ y

$$c' x = \sum_{i \in I} a_i ' x \geq \sum_{i \in I} b_i \qquad (*)$$

(Esto es bajo el supuesto de que P es tal que Ax>=b, es decir, el típico poliedro de un problema de minimización).

Esto muestra que x* es una solución óptima al problema de minimizar c'x en el conjunto P (x* es el mínimo de (*)). Es más, la igualdad en (*) se da si y solo si $a_i' x = b_i$ para todo $i \in I$. Dado que x* es una solución básica factible, existen n restricciones l.i. activas en x*, y x* es la única solución al sistema de ecuaciones $a_i' x = b_i$, $i \in I_i$ (es la única por definición de solución básica). De aquí sigue que x* es el único que minimiza c'x en el conjunto P, por lo tanto x* es un vértice de P (ver definición de vértice).

3.

a) Respuesta: xB >= 0
b) Es una solución degenerada. Para graficar, sirve cualquier poliedro donde 3 restricciones pasan por un vértice (en R^2). En realidad, es válido cualquier vértice que esté sobredimensionado (más restricciones que dimensiones del problema en el punto en cuestión). ¡Deben dibujarlo!
c) En el criterio de salida de la base. Éste encuentra dos variables básicas que simultáneamente toman valor cero. Una de estas variables sale de la base, es decir se convierte en variable no básica, y la otra queda en la base con valor 0.

4. Al ver la F.O. escrita de la forma alternativa, vemos que las variables no básicas están multiplicadas por los $\bar{c}$ asociados a éstas. El valor de estas variables es 0, por definición. Si hubiese algún costo reducido de variable no básica negativo, nos convendría que esta variable tomase un valor positivo (en vez de 0), ya que con esto podríamos minimizar más la F.O. (en otras palabras, el hecho de que el costo reducido sea negativo hace que nos convenga que la variable X_N asociada deje de ser cero). Sin embargo, cuando esto no ocurre (los costos reducidos son todos positivos), no tenemos cómo seguir mejorando, lo que indica que estamos en el óptimo. "Nos conviene que la variable X_N siga valiendo cero".

5. El mejor valor teórico que podría tomar la F.O. es cero, en cuyo caso la restricción se cumple como Ax=b. Luego, si la F.O. es mayor que cero es porque no es posible satisfacer la restricción Ax=b y por eso el problema original es infactible

Problema 2

Variables: (0,25 pts. c/u)

$$X_{jkt} = \begin{cases} 1 & \text{Si se produce producto j con el proceso k en t} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$$

$$Z_{kt} = \begin{cases} 1 & \text{Si uso proceso k en t} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$$

Q_{jt} = Cantidad (litros) de producto j a producir en t

W_t = Cantidad (litros) por los que me paso de Q* en t

Nota de corrección: *Es posible trabajar la variable Q con otras unidades, no hay mucho problema pero tendrán que dividir o multiplicar por 1000 en algunas restricciones, por ejemplo. La variable W sin embargo debe ser en litros, después se explica por qué. En el enunciado se pedía un modelo para "encontrar la cantidad de litros a producir", por lo que trabajar en litros era la mejor opción. No se necesitan variables que digan cuántos insumos compro.*

Restricciones:

1. Naturaleza de las variables: (0,3 pts)

$$X_{jkt}, Z_{kt} \in \{0,1\}$$
$$Q_{jt}, W_t \in \mathrm{N}$$

Nota de corrección: A priori se esperaba que usaran un Q entero, sin embargo y dado que el enunciado no era muy claro en ese tema, se acepta que sea una variable real.

2. "Sólo produzco si decidí producir": (0,4 pts.)

$$Q_{jt} \leq X_{jkt} * M \qquad \forall j,k; M >> 0$$

3. Relación entre X y Z: (0,4 pts.)

$$X_{jkt} \leq Z_{kt} \qquad \forall j,k; M >> 0$$

4. Debo elegir un sólo proceso k: (0,4 pts.)

$$\sum_k Z_{kt} = 1 \qquad \forall t$$

5. Si elijo proceso k en t, en t+1 debo elegir proceso compatible: (0,4 pts.)

$$Z_{kt} + Z_{k',t+1} \leq 1 + V_{kk'} \qquad \forall k,k',t$$

6. Capacidad máxima de insumos a pedir: (0,4 pts.)

$$\sum_j Q_{jt} * a_{ij} \leq CAP_i \qquad \forall i$$

Nota de corrección: Ojo con las unidades, si usaron unidades distintas tendrán que dividir por algo el término de la izquierda. Lo mismo para todas las restricciones con Q.

7. Definición de W (va aumentando de acuerdo a cantidad de litros): (0,4 pts.)

$$\frac{\sum_{i,j} Q_{jt} * a_{ij}}{1000} \leq \overline{Q} + W_t \qquad \forall t$$

Nota de corrección: Dividimos en 1000 para que quede en litros. El costo adicional se cobra por cada litro. Se asume implícitamente que si se llevan 4,5 litros, deben redondear hacia arriba y pagar los 5 litros extra en costo. Es por esto que W se define como entera.

8. Presupuesto para insumos: (0,4 pts.)

$$\sum_{i,j} Q_{jt} * a_{ij} * C_i + (1 + W_t * \frac{TASA}{100}) * CT \leq PPTO \qquad \forall t$$

Nota de corrección: Si no agregan el término del costo de transporte está bien, pues depende de cómo interpreten la línea del enunciado.

9. No producir Marshello y Crepúsculo juntos: (0,4 pts.)

$$X_{MARSHELLO,k,t} + X_{CREPUSCULO,k,t} \leq 1 \qquad \forall k,t$$

10. Caldo y Rosas van juntos si es que van: (0,4 pts.)

$$X_{CALDO,k,t} = X_{ROSAS,k,t} \qquad \forall k,t$$

11. ZMRR >= 25% del total de la producción: (0,4 pts.)

$$Q_{ZMRR,t} \geq 0.25 * \sum_{j} Q_{j,t} \qquad \forall t$$

Nota de corrección: *Es válido si en esta última suman sobre t en vez de hacerlo para todo t.*

Función objetivo: (0,7 pts)

$$\max\{\sum_{j,t} P_j * (Q_{jt} * 10) - \sum_{i,j,t} Q_{jt} * a_{ij} * C_i - (1 + W_t * \frac{TASA}{100}) * CT - \sum_{j,k,t} X_{jkt} * CP_{jkt}\}$$

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl