|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Profesores:  Coordinador: | Richard Weber, Rodrigo Wolf  Daniel Lillo |
| Auxiliares: | Víctor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara |

**IN3701 – Modelamiento y Optimización**

**Auxiliar 6**

**14 de Octubre de 2010**

**Problema 1:** **Dualidad y THC**

Considere el siguiente problema de optimización:

1. Encuentre una cota inferior al valor óptimo de (P) mediante una combinación lineal de las restricciones.
2. Formule el problema dual de (P) para encontrar la mejor cota inferior.
3. Grafique la región factible de (P) y encuentre el óptimo por inspección .
4. Encuentre el óptimo del problema dual (D) usando el **Teorema de Holgura Complementaria**.
5. Reemplace la cuarta restricción por y desarrolle nuevamente b), c) y d). ¿Qué diferencias existen? **(PROPUESTO)**

**Problema 2: Comente**

Sea (P) un problema de maximización y (D) el problema dual correspondiente. Sean:

* la solución y el valor óptimos de (P),
* la solución y el valor óptimos de (D),
* una solución factible para (P) y su valor objetivo y
* una solución factible para (D) y su valor objetivo

1. y
2. (P) infactible (D) infactible.
3. (P) tiene solución óptima finita (D) tiene solución óptima finita.
4. (P) no acotado (D) no acotado.

Considere el problema (P) de la parte 1:

1. Reducir el lado derecho de la restricción 1 en 1 reducirá en .
2. Aumentar el lado derecho de la restricción 4 en reducirá en .
3. Aumentar el lado derecho de la restricción 4 en 10 reducirá en .
4. Vuelva a responder h) e i) para el caso en que la cuarta restricción se reemplaza por .

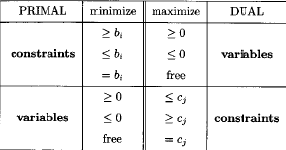
**Problema 3: Análisis de Sensibilidad**

Considere el problema (P) de la parte 1:

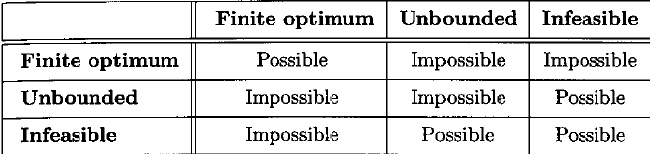
1. Analice en qué rango puede variar el lado derecho de cada una de las restricciones sin que la base óptima cambie. Grafique. ¿La solución óptima cambia?
2. Analice en qué rango puede variar el coeficiente de cada una de las variables en la función objetivo sin que la base óptima cambie. Grafique. ¿La solución óptima cambia?

**ANEXOS**

1. Tabla de conversión Primal-Dual



1. Distintas posibilidades para los problemas Primal y Dual



1. Teorema de Holgura Complementaria

Sean e soluciones factibles de los problemas (P) y (D) respectivamente. e son soluciones óptimas a sus respectivos problemas si y sólo si se cumple que:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Profesores:  Coordinador: | Richard Weber, Rodrigo Wolf  Daniel Lillo |
| Auxiliares: | Víctor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara |

**IN3701 – Modelamiento y Optimización**

**Pauta Auxiliar 6**

**14 de Octubre de 2010**

**Problema 1:** **Dualidad y THC**

**Parte a)**

Notar que para que efectivamente se encuentre una cota inferior, las primeras dos restricciones deben multiplicarse por un valor no-negativo, mientras que las demás, por un valor no positivo:

Escojamos , luego:

Sumando las restricciones se obtiene:

y como término a término se tiene que:

**Notar que como no sabemos el signo de , la única forma de asegurarnos de que esta expresión sea una cota inferior a es igualando el primer coeficiente a .**

se concluye que:

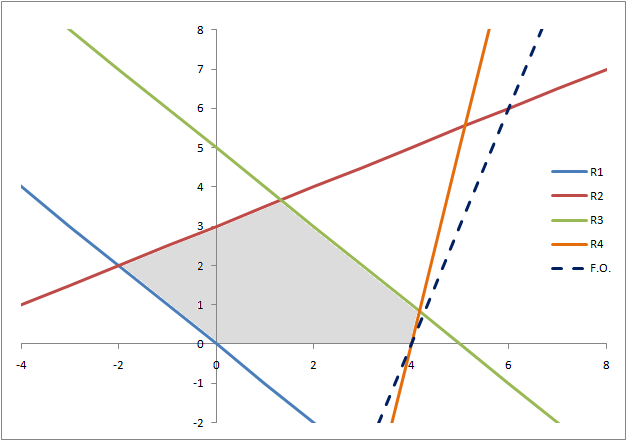
para cualquier solución que satisfaga todas las restricciones, en particular:

**Parte b)**

El problema dual queda:

* La función objetivo maximiza el valor de la cota formada con el lado derecho de las restricciones.
* La primera restricción obliga a que el coeficiente de sea igual a , para asegurar que sea una cota inferior. (no sabemos el signo de )
* La segunda restricción obliga a que el coeficiente de sea menor o igual a , para asegurar que sea una cota inferior. (sabemos que )
* para conservar el sentido de la desigualdad (necesitamos que el lado derecho sea menor al lado izquierdo, para que sea cota inferior)
* para cambiar el sentido de la desigualdad (necesitamos que el lado derecho sea menor al lado izquierdo, para que sea cota inferior)

**Parte c)**



El óptimo se alcanza en el punto con un valor óptimo de .

**Parte d)**

Teorema de Holgura Complementaria

Luego, (1) implica que:

Luego, (2) implica que:

Resolviendo el sistema se obtiene que el óptimo se alcanza en el punto con un valor óptimo de .

**Parte e)**

PROPUESTO

**Problema 2: Comente**

1. Teorema de Dualidad Fuerte: Esta afirmación es cierta sólo si (P) y (D) tienen solución óptima finita.
2. Falso, el problema de maximización siempre está “por debajo” del problema de minimización, luego . (Teorema de Dualidad Débil)
3. Verdadero, casos particulares del Teorema de Dualidad Débil.
4. Falso, si (P) es infactible, (D) puede ser infactible o no acotado.
5. Verdadero, Teorema de Dualidad Fuerte
6. Falso, si (P) es no acotado entonces (D) es infactible. (Corolario del Teorema de Dualidad Débil)
7. Verdadero (OJO, para este caso particular). Reducir hace crecer la región factible, por lo que la solución óptima podría mejorar si la restricción 1 fuese activa en el punto óptimo. Como este no es el caso, el valor óptimo no mejora y la variable dual óptima asociada sí corresponde al **precio sombra** de esta restricción.
8. Verdadero para este caso. La restricción 4 es activa en el óptimo, por lo que aumentar su lado derecho permite mejorar marginalmente la función objetivo a una tasa . Luego, esta afirmación es verdadera para un suficientemente pequeño.
9. Falso, el precio sombra es una tasa marginal de mejora, por lo que no puede generalizarse para crecimientos muy grandes de . Para este caso particular, la tasa de mejora es válida sólo hasta un crecimiento de 5 unidades de .
10. En este caso se tiene que el punto óptimo es un **punto degenerado**, por lo que tiene 3 restricciones activas (2 de las restricciones más la no-negatividad de ). Luego, se tendrán 2 variables óptimas duales libres ( e ), es decir, 2 precios sombra que pueden ser no nulos. Sin embargo, la interpretación de estos valores ya no corresponden a los respectivos precios sombra, ya que al aumentar por separado una de estas restricciones el punto óptimo no cambia (sólo deja de ser degenerado) y por ende, el valor óptimo de la función objetivo no mejora. (EL DESARROLLO QUEDA PROPUESTO)

**Problema 3: Análisis de Sensibilidad**

Lo primero es escribir el problema en forma estándar:

Sabemos que el punto óptimo es , luego:

Luego, las variables básicas y no básicas son:

, , ,

Para que la base se mantenga óptima deben cumplirse los criterios de:

**Factibilidad:**

**Optimalidad:**

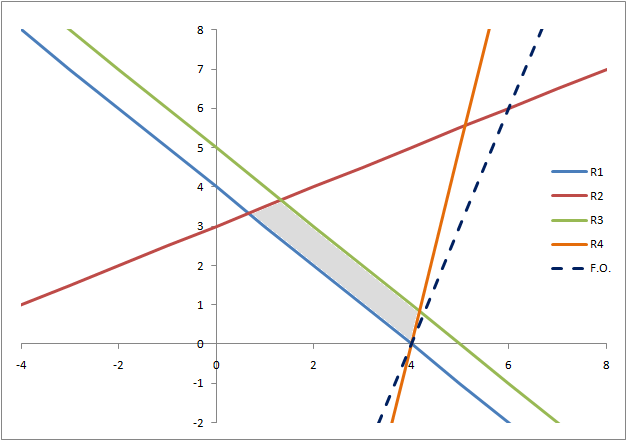
**Parte a)**

Notar que si cambia, el criterio de optimalidad no se ve afectado, luego sólo analizamos que la base se mantenga factible:

**Analizamos :**

**Factibilidad:**

Luego

****

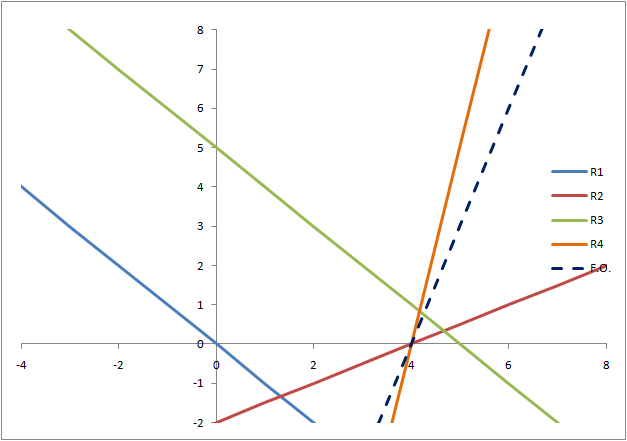
*Caso extremo:*

*La solución óptima se mantiene, pero ahora se trata de un punto degenerado.*

**Analizamos :**

**Factibilidad:**

Luego

****

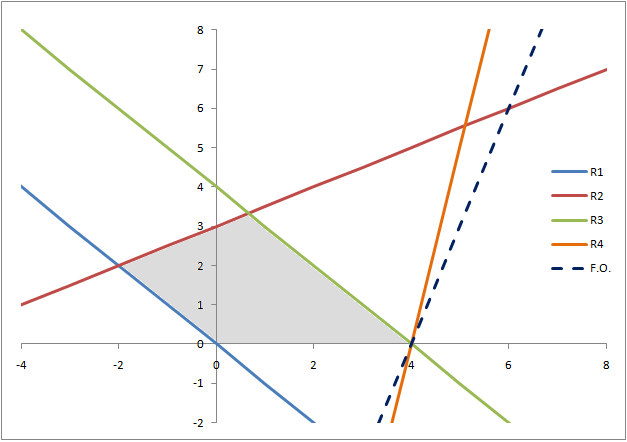
*Caso extremo:*

*La solución óptima se mantiene, pero ahora es la única solución factible. Además, es un punto degenerado.*

**Analizamos :**

**Factibilidad:**

Luego

****

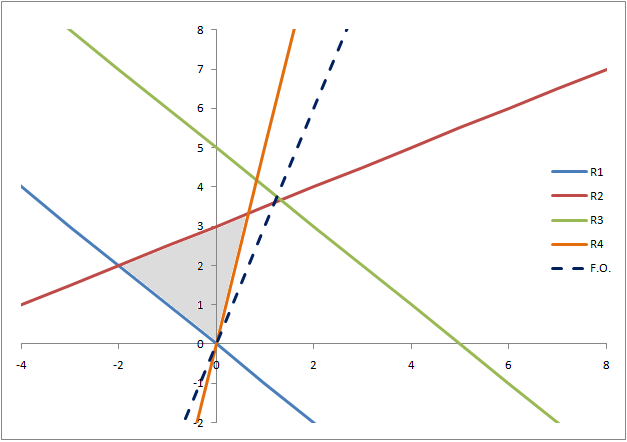
*Caso extremo:*

*La solución óptima se mantiene, pero ahora se trata de un punto degenerado.*

**Analizamos :**

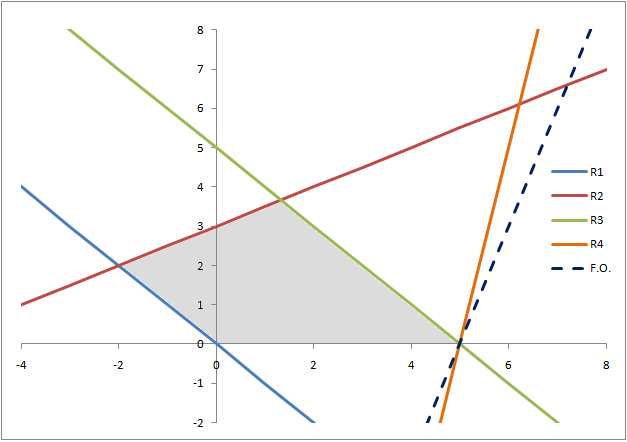
**Factibilidad:**

Luego

****

*Caso extremo 1:*

*La solución óptima cambia a .*

****

*Caso extremo 2:*

*La solución óptima cambia a .*

*En general, en este intervalo, la solución óptima cambia a .*

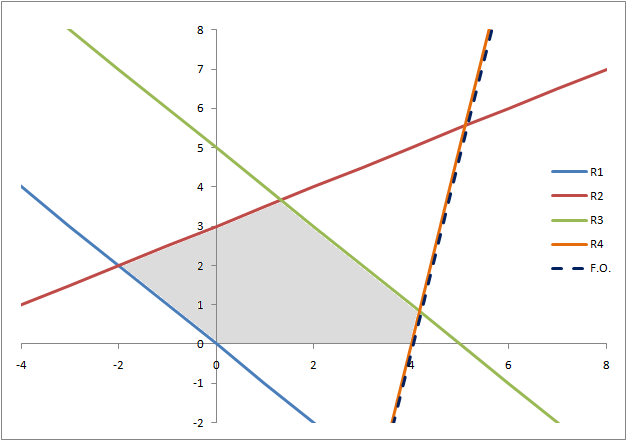
**Parte b)**

Notar que si cambia, el criterio de factibilidad no se ve afectado, luego sólo analizamos que la base se mantenga óptima:

**Analizamos :**

**Optimalidad:**

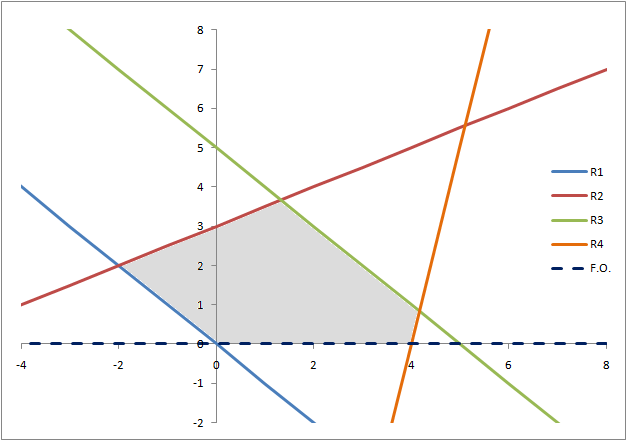
Luego

****

*Caso extremo 1:*

*La solución óptima se mantiene en , pero el valor óptimo cambia a .*

*Además, la solución y todo el segmento que la une con son soluciones óptimas con .*

****

*Caso extremo 2:*

*La solución óptima se mantiene en , pero el valor óptimo cambia a .*

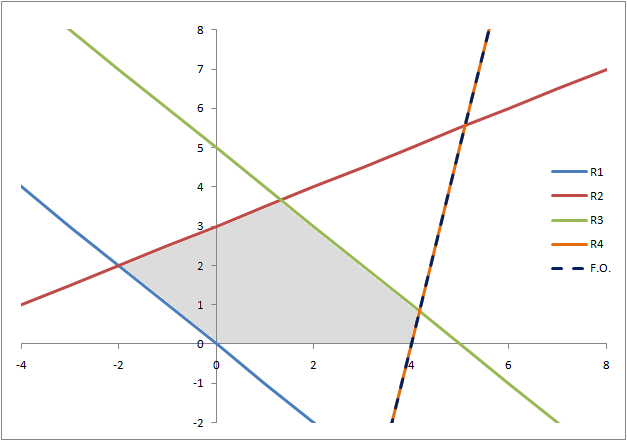
*Además, la solución y todo el segmento que la une con son soluciones óptimas con .*

*En general, en este intervalo, la solución óptima se mantiene en y el costo óptimo es . En los casos no extremos es la única solución.*

**Analizamos :**

**Optimalidad:**

Luego

****

*Caso extremo:*

*La solución óptima se mantiene en , pero el valor óptimo cambia a .*

*Además, la solución y todo el segmento que la une con son soluciones óptimas con .*

*En general, en este intervalo, la solución óptima se mantiene en y el costo óptimo es . En los casos no extremos es la única solución.*

**Dudas y/o Comentarios a:**

**Nelson Devia**

**ndevia@ing.uchile.cl**