Análisis de Sensibilidad

Basado en Bertsimas, Tsitsiklis

"Introduction to Linear Optimization"

Chap. 5

IN3701 – Modelamiento y Optimización

Nelson Devia C.

Introducción

- Consideremos el problema (P) en forma estándar y su dual (D):

$$(P)\ Min\ c'x \qquad\qquad (D)\ Max\ y'b$$
$$Ax = b \qquad\qquad y'A \le c'$$
$$x \ge 0$$

  - Supongamos que tenemos la base óptima A_B y la solución óptima asociada x^*.
  - Si alguno de los coeficientes de b ó c cambia:
    - ¿Se mantiene la base óptima?
    - ¿Cómo calcular la nueva solución óptima sin resolver el problema otra vez?
  - Como A_B es la base óptima sabemos que cumple las condiciones de:
    - **Factibilidad:** $x_B = A_B^{-1} b \ge 0$
    - **Optimalidad:** $\bar{c}'_N = c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N \ge 0'$
  - Si al cambiar el problema se siguen cumpliendo ambas condiciones, entonces la base se mantiene óptima.

Cambios en el Vector b

- Supongamos que la i-ésima componente de b es aumentada en δ
  - Equivalentemente, b se reemplaza por $b + \delta e_i$
- Nos interesa saber en qué rango se puede mover δ sin que cambie la base óptima.

- **Factibilidad:** $A_B^{-1}(b + \delta e_i) \geq 0$

$$x_B + \delta A_B^{-1} e_i \geq 0$$

  - Sea g la i-ésima columna de A_B^{-1} : $x_B + \delta g \geq 0$
  - Luego

$$\delta \begin{cases} \geq \dfrac{-(x_B)_j}{g_j} & g_j > 0 \\ \leq \dfrac{-(x_B)_j}{g_j} & g_j < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\max_{\{j/g_j>0\}} \left[\frac{-(x_B)_j}{g_j}\right] \leq \delta \leq \min_{\{j/g_j<0\}} \left[\frac{-(x_B)_j}{g_j}\right]}$$

Cambios en el Vector b

- **Optimalidad:**
  - Al variar b, los costos reducidos no se ven afectados

$$\bar{c}'_N = c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N \geq 0'$$

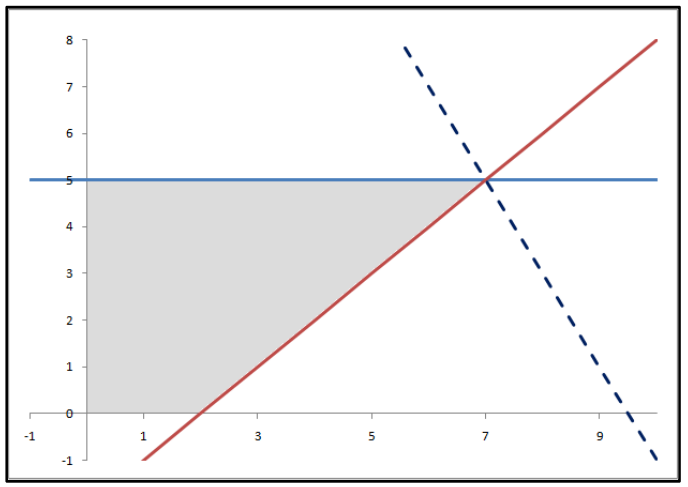
  - El nuevo costo óptimo está dado por:

$$c'_B A_B^{-1}(b + \delta e_i) = y'^{*} b + \delta y_i$$

    - Donde y^* es la solución óptima del problema dual (precio sombra)

- Ejemplo:

$$\begin{aligned} Max\ & 2x_1 + x_2 \\ & x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + x_2 \leq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Cambios en el Vector b

- En forma estándar:

$$Min\ -2x_1 - x_2$$
$$x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

  - La base óptima es:

$$x_B = \{x_1, x_2\} \quad x_N = \{x_3, x_4\} \quad \text{con} \quad A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  - Factibilidad:

$$A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0$$

  - Optimalidad:

$$c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N = (0 \quad 0) - (-2 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (3 \quad 2) \geq 0$$

Cambios en el Vector b

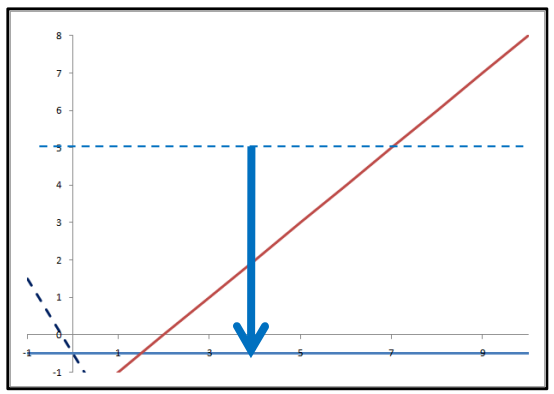
- Si cambiamos b_1:

$$Min\ -2x_1 - x_2$$
$$x_2 + x_3 = b_1$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

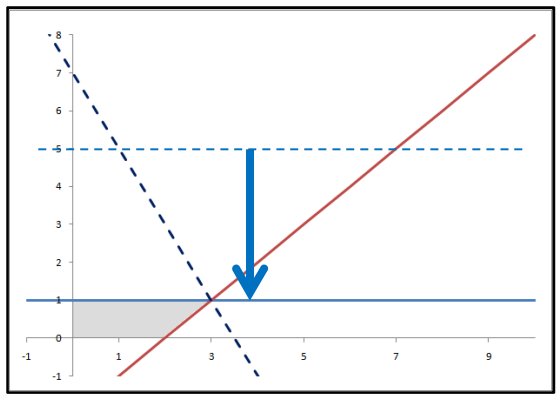
- Factibilidad:

$$A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + 2 \\ b_1 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} b_1 \geq -2 \\ b_1 \geq 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad b_1 \geq 0$$

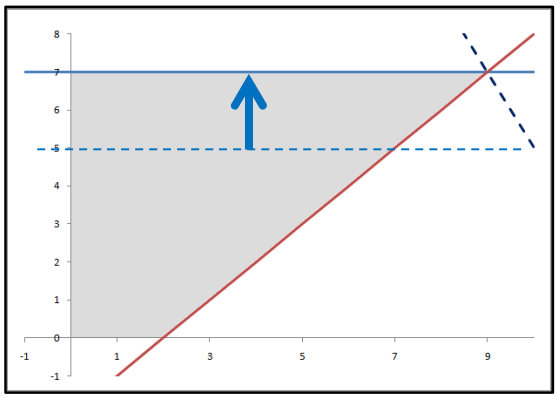
- Es decir, para cualquier b_1 positivo la base se mantiene óptima



$b_1 = -0,5$ (infactible)



$b_1 = 1$ (base aún óptima)



$b_1 = 7$ (base aún óptima)

Cambios en el Vector b

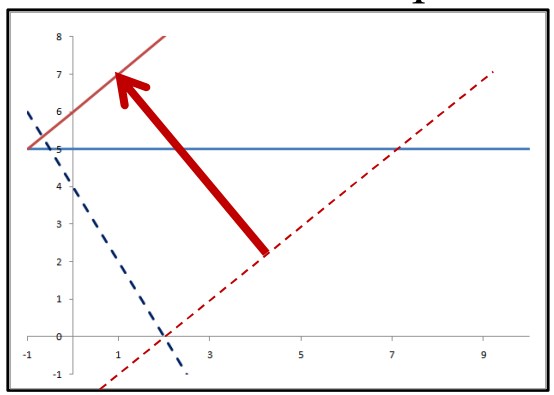
- Si cambiamos b_2:

$$Min\ -2x_1 - x_2$$
$$x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = b_2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

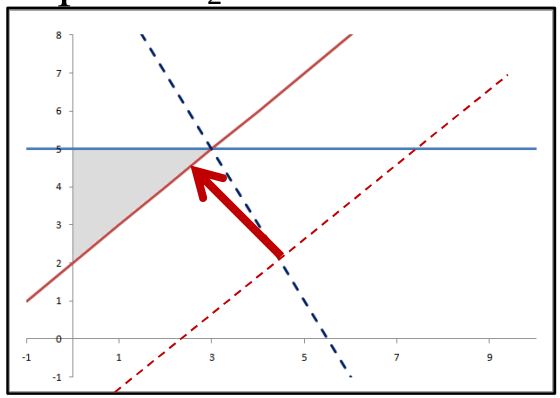
- Factibilidad:

$$A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + b_2 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 \geq -5$$

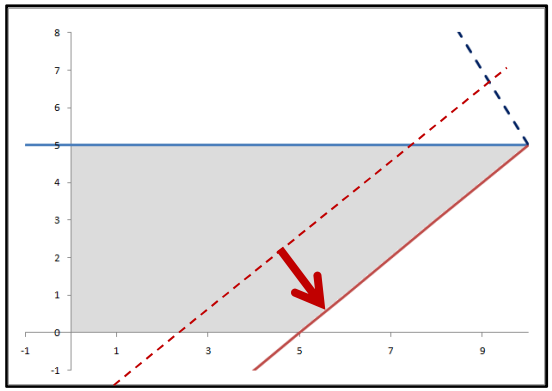
- Es decir, para cualquier $b_2 \geq -5$ la base se mantiene óptima



$b_2 = -6$ (infactible)



$b_2 = -2$ (base aún óptima)



$b_2 = 5$ (base aún óptima)

Cambios en el Vector c

- Supongamos que la j-ésima componente de c es aumentada en δ
  - Nos interesa saber en qué rango se puede mover δ sin que cambie la base óptima.
- **Factibilidad:**
  - Al variar c, la región factible no cambia y no se afecta la factibilidad: $A_B^{-1}b \geq 0$
- **Optimalidad:** $c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N \geq 0$
  - Si c_j es el costo de una variable no básica, c_B no cambia y se tiene la condición: $c'_j + \delta \geq c'_B A_B^{-1} A_j$
  - Equivalentemente, usando los costos reducidos:

$$\delta \geq -\bar{c}'_j$$

Cambios en el Vector c

- Si c_j es el costo de una variable básica y cambia a $c_j + \delta$
  - Equivalentemente los costos de las variables básicas ahora son:

$$c_B + \delta e_k$$

  - Donde $j = B(k)$ (la k-ésima variable básica)

- Se tiene que:

$$(c_B + \delta e_k)' A_B^{-1} A_N \leq c'_N$$

- Luego:

$$\delta \left(A_B^{-1} A_N\right)_k \leq \bar{c}'_N$$

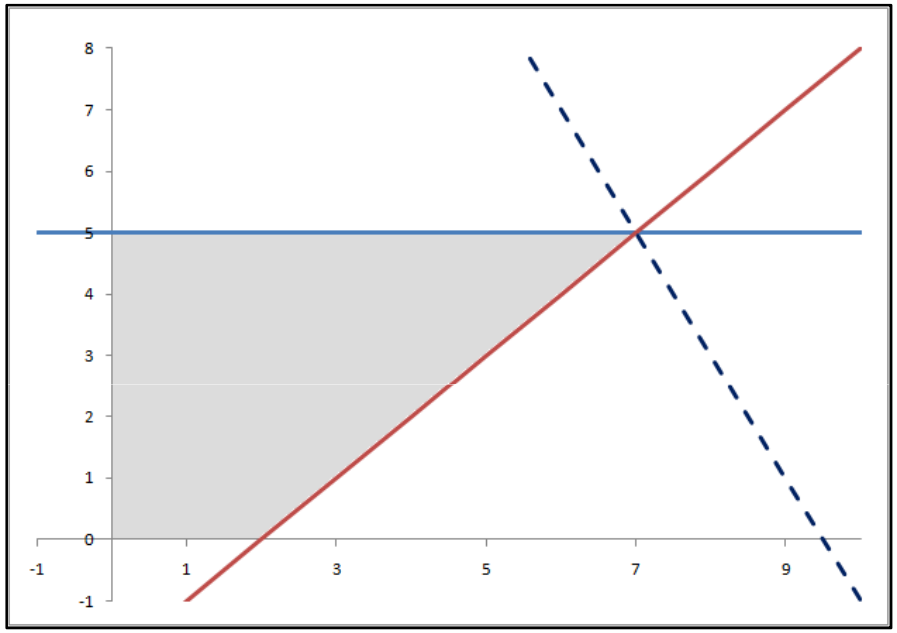
- Sea q la k-ésima fila de $\left(A_B^{-1} A_N\right)$

$$\delta \begin{cases} \leq \dfrac{(\bar{c}_N)_i}{q_i} & q_i > 0 \\ \geq \dfrac{(\bar{c}_N)_i}{q_i} & q_i < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\max_{\{i/q_j<0\}} \left[\frac{(\bar{c}_N)_i}{q_i}\right] \leq \delta \leq \min_{\{i/q_j>0\}} \left[\frac{(\bar{c}_N)_i}{q_i}\right]}$$

Cambios en el Vector c

- Ejemplo:

$$Max\ 2x_1 + x_2$$
$$x_2 \leq 5$$
$$-x_1 + x_2 \leq -2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



  - En forma estándar:

$$Min\ -2x_1 - x_2$$
$$x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

  - Al variar los coeficientes de la función objetivo se cambia su pendiente…

Cambios en el Vector c

- Si cambiamos c_1:

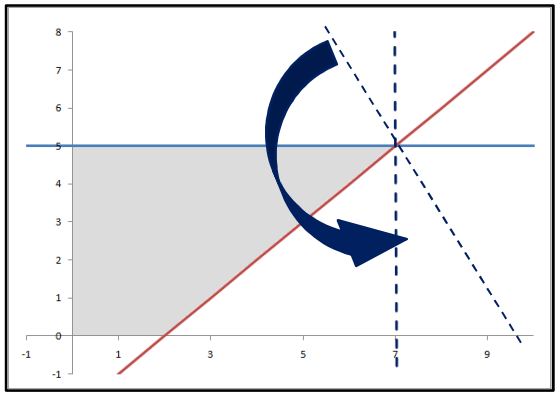
$$Min\ c_1 x_1 - x_2$$
$$x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- Optimalidad:

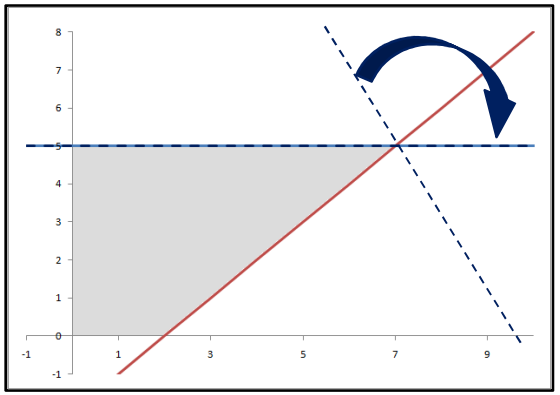
$$c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N = (0 \quad 0) - (c_1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 - c_1 \quad -c_1) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} c_1 \leq 1 \\ c_1 \leq 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 \leq 0$$

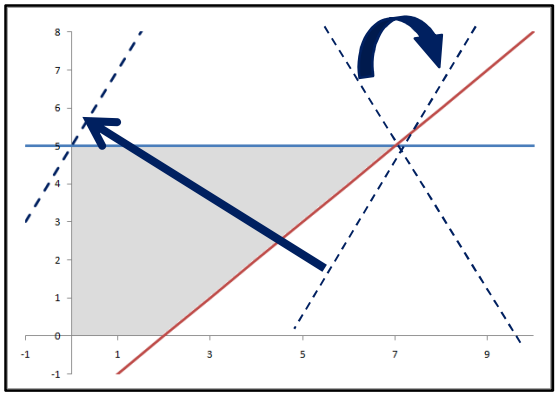
- Es decir, para cualquier c_1 negativo la base se mantiene óptima



c_1 =-200 (base aún óptima)



c_1 =0 (base aún óptima)



c_1 =2 (la base óptima cambió)

Cambios en el Vector c

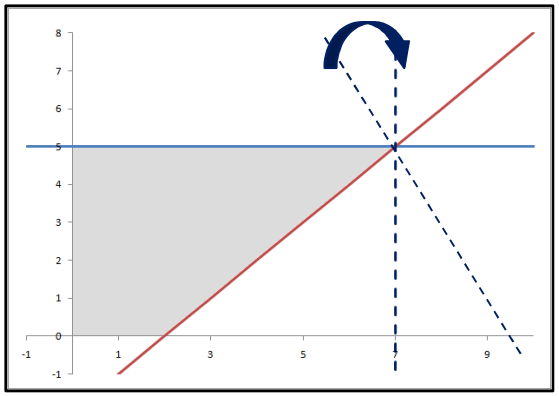
- Si cambiamos c_2:

$$Min\ -2x_1 + c_2 x_2$$
$$x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

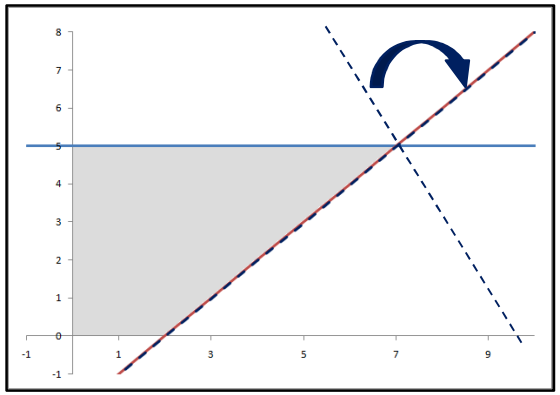
- Optimalidad:

$$c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - c_2 & 2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 \leq 2$$

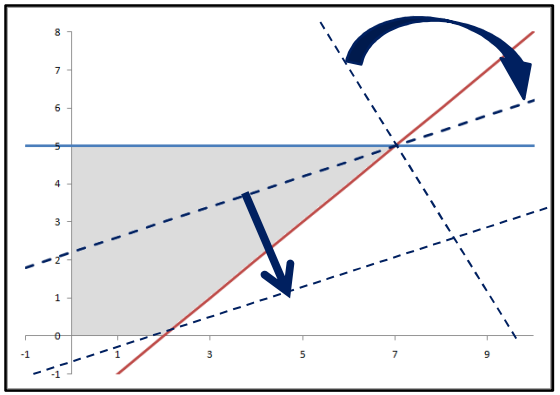
- Es decir, para cualquier $c_2 \leq 2$ la base se mantiene óptima



$c_2 = 0$ (base aún óptima)



$c_2 = 2$ (base aún óptima)



$c_2 = 3$ (la base óptima cambió)

Análisis de Sensibilidad

Basado en Bertsimas, Tsitsiklis

"Introduction to Linear Optimization"

Chap. 5

IN3701 – Modelamiento y Optimización

Nelson Devia C.