Dualidad

Basado en Bertsimas, Tsitsiklis

"Introduction to Linear Optimization"

Chap. 4

IN3701 – Modelamiento y Optimización

Nelson Devia C.

Introducción

- Sea el problema de optimización (P):

$$\begin{aligned}(P)\ Max\ z &= c'x \\ Ax &\le b \\ x &\ge 0\end{aligned}$$

- Consideremos la siguiente relajación de (P):

$$g(y) = \underset{x \ge 0}{Max}\left[c'x + y'(b - Ax)\right] \quad (PR)$$

  - Las restricciones se han reemplazado por penalizaciones en la función objetivo, ponderadas por un vector $y \ge 0$
  - Al tener menos restricciones, la región factible de (PR) es mayor o igual que la (P), por lo tanto:

$$g(y) \ge z^* = c'x^*$$

  - Luego, para todo vector $y \ge 0$, se obtiene una cota superior para (P)

Introducción

- Luego, la mejor cota que podemos obtener está dada por:

$$\begin{aligned} &Min\ g(y) \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

- Pero sabemos que:

$$\begin{aligned} g(y) &= \underset{x \geq 0}{Max}\left[c'x + y'(b - Ax)\right] \\ &= y'b + \underset{x \geq 0}{Max}\left[(c' - y'A)x\right] \end{aligned}$$

  - Donde:

$$\underset{x \geq 0}{Max}\left[(c' - y'A)x\right] = \begin{cases} 0 & si\ (c' - y'A) \leq 0 \\ +\infty & si\ no \end{cases}$$

- Por ahora, sólo nos interesa el caso finito, luego se tiene que la mejor cota posible está dada por:

$$\begin{aligned} &Min\ y'b \\ &c' - y'A \leq 0 \\ &y \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &(D)\ Min\ w = b'y \\ &A'y \geq c \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

El Problema Dual

- El problema original (P) se conoce como el **problema primal**, mientras que (D) se conoce como el **problema dual** de (P)

$$\begin{array}{ll} (P)\ Max\ z = c'x & (D)\ Min\ w = b'y \\ Ax \le b & A'y \ge c \\ x \ge 0 & y \ge 0 \end{array}$$

- En general:

$$\begin{array}{ll} (P)\ Min\ z = c'x & (D)\ Max\ w = b'y \\ a'_i x \ge b_i \quad i \in M_1 & y_i \ge 0 \quad i \in M_1 \\ a'_i x \le b_i \quad i \in M_2 & y_i \le 0 \quad i \in M_2 \\ a'_i x = b_i \quad i \in M_3 & y_i\ libre \quad i \in M_3 \\ x_j \ge 0 \quad j \in N_1 & A'_j y \le c_j \quad j \in N_1 \\ x_j \le 0 \quad j \in N_2 & A'_j y \ge c_j \quad j \in N_2 \\ x_j\ libre \quad j \in N_3 & A'_j y = c_j \quad j \in N_3 \end{array}$$

El Problema Dual

- Notar que por cada variable en el primal se introduce una restricción en el dual y por cada restricción en el primal, una variable en el dual:

PRIMAL	minimize	maximize	DUAL
constraints	$\geq b_i$	≥ 0	variables
	$\leq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	free	
variables	≥ 0	$\leq c_j$	constraints
	≤ 0	$\geq c_j$	
	free	$= c_j$	

Ejemplo

- Consideremos el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
(P)\ Max\ z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 & \\
-x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 \quad & (y_1) \\
5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6 \quad & (y_2) \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0 &
\end{aligned}
$$

- Si elegimos $y_1 = 1, y_2 = 2$, ponderamos las restricciones y las sumamos, obtenemos una cota superior de z para cualquier x factible en (P):

$$
\begin{aligned}
z &= 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\
&\leq [1\cdot(-1) + 2\cdot 5]x_1 + [1\cdot(-2) + 2\cdot 1]x_2 + [1\cdot 1 + 2\cdot 4]x_3 \leq [1\cdot 10 + 2\cdot 6] \\
&= 9x_1 + 0x_2 + 9x_3 \\
&\leq 22
\end{aligned}
$$

Ejemplo

- En particular: $z^* \leq 22$
- La mejor cota está dada por el vector y que resuelva:
  - Minimizar el valor de la cota: $(D)\ Min\ w = 10y_1 + 6y_2$
  - Cota para el coeficiente de x_1: $-y_1 + 5y_2 \geq 3 \quad (x_1)$
  - Cota para el coeficiente de x_2: $-2y_1 + y_2 \geq -2 \quad (x_2)$
  - Cota para el coeficiente de x_3: $y_1 + 4y_2 \geq 7 \quad (x_3)$
  - Multiplicadores positivos $y_1, y_2 \geq 0$
    - (Conservan el sentido de las desigualdades)
- Nota:
  - Se puede formular este problema a partir de (P), usando la tabla de la lámina 5.

Ejemplo

- Matricialmente:
  - Primal:

$$(P)\ Max\ z = \begin{pmatrix}3 & -2 & 7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}'$$

$$\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}10 \\ 6\end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

  - Dual:

$$(D)\ Min\ z = \begin{pmatrix}10 & 6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}y_1 & y_2\end{pmatrix}'$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 5 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}y_1 \\ y_2\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}3 \\ -2 \\ 7\end{pmatrix}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Teorema

- Sea un problema de minimización (P) y su correspondiente problema dual (D). Si se obtiene el problema dual de (D) se recupera el problema original (P).

- En otras palabras ***"El dual del dual es el primal"***

$$\begin{aligned}(P)\ Max\ z &= c'x \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0\end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned}(D)\ Min\ w &= b'y \\ A'y &\geq c \\ y &\geq 0\end{aligned}$$

Teoremas de Dualidad

- **Teorema de Dualidad Débil:**
  - Sea x una solución factible del problema (de minimización) primal (P) e y, una solución factible del problema (de maximización) dual (D), entonces: $w = b'y \quad \leq \quad z = c'x$
  - En otras palabras:
    - ***w es una cota inferior para cualquier solución factible de (P)***
    - ***z es una cota superior para cualquier solución factible de (D)***
  - **Corolario 1:**
    - Si (P) es no acotado, es decir: $z^* = -\infty$ entonces (D) es infactible
    - Si (D) es no acotado, es decir: $w^* = +\infty$ entonces (P) es infactible
  - **Corolario 2:**
    - Si $b'y = c'x$, entonces x e y son soluciones óptimas de los problemas primal y dual, respectivamente.

Teoremas de Dualidad

- Ejemplo**:**
  - Solución factible de (P):

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 7$$

$$(P)\ Max\ z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3$$
$$-x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 \quad (y_1)$$
$$5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6 \quad (y_2)$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

  - Solución factible de (D):

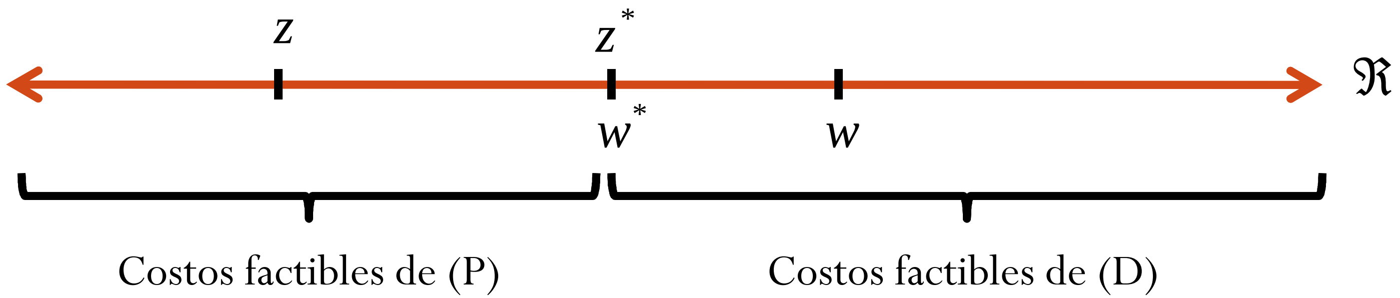
$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow w = 22$$

$$(D)\ Min\ w = 10y_1 + 6y_2$$
$$-y_1 + 5y_2 \geq 3 \quad (x_1)$$
$$-2y_1 + y_2 \geq -2 \quad (x_2)$$
$$y_1 + 4y_2 \geq 7 \quad (x_3)$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

  - **Dualidad débil** $\Rightarrow$ $z \leq w$

Teoremas de Dualidad

- **Teorema de Dualidad Fuerte:**
  - Si un problema de programación lineal tiene una solución óptima, también la tiene su dual y los respectivos costos óptimos son iguales: $z^* = w^*$



- **Posibilidades para el primal y el dual:**

	Finite optimum	**Unbounded**	**Infeasible**
Finite optimum	Possible	Impossible	Impossible
Unbounded	Impossible	Impossible	Possible
Infeasible	Impossible	Possible	Possible

Teoremas de Dualidad

- Ejemplo**:**
  - Solución óptima de (P):

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow z^* = 10{,}5$$

$$\begin{aligned} (P)\ & Max\ z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ & -x_1 - 2x_2 + x_3 \le 10 \quad (y_1) \\ & 5x_1 + x_2 + 4x_3 \le 6 \quad (y_2) \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

  - Solución óptima de (D):

$$y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}75 \end{pmatrix} \Rightarrow w^* = 10{,}5$$

$$\begin{aligned} (D)\ & Min\ w = 10y_1 + 6y_2 \\ & -y_1 + 5y_2 \ge 3 \quad (x_1) \\ & -2y_1 + y_2 \ge -2 \quad (x_2) \\ & y_1 + 4y_2 \ge 7 \quad (x_3) \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

  - **Dualidad fuerte** $\Rightarrow z^* = w^*$

Holgura Complementaria

- **Teorema:**
  - Sean x e y soluciones factibles para el problema primal y dual, respectivamente. Los vectores x e y son soluciones óptimas de sus respectivos problemas si y sólo si:

$$y_i \cdot \left(a'_i\, x - b_i\right) = 0 \quad \forall i$$
$$\left(c_j - y' A_j\right) \cdot x_j = 0 \quad \forall j$$

  - Es decir:
    - La i-ésima variable dual es cero o la i-ésima restricción primal es activa y
    - la j-ésima variable primal es cero o la j-ésima restricción dual es activa
  - Permite encontrar el óptimo del problema primal a través del óptimo del problema dual
    - ¡El dual puede ser más fácil de resolver!

Holgura Complementaria

- Ejemplo:

$$(P)\ Max\ z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3$$
$$-x_1 - 2x_2 + x_3 \le 10 \quad (y_1)$$
$$5x_1 + x_2 + 4x_3 \le 6 \quad (y_2)$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot \left(-x_1^* - 2x_2^* + x_3^* - 10\right) = 0$$
$$1{,}75 \cdot \left(5x_1^* + x_2^* + 4x_3^* - 6\right) = 0$$
$$\left(3 + 0 - 5 \cdot 1{,}75\right) \cdot x_1^* = 0$$
$$\left(-2 + 2 \cdot 0 - 1{,}75\right) \cdot x_2^* = 0$$
$$\left(7 - 0 - 4 \cdot 1{,}75\right) \cdot x_3^* = 0$$

$$(D)\ Min\ w = 10y_1 + 6y_2$$
$$-y_1 + 5y_2 \ge 3 \quad (x_1)$$
$$-2y_1 + y_2 \ge -2 \quad (x_2)$$
$$y_1 + 4y_2 \ge 7 \quad (x_3)$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

$$y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}75 \end{pmatrix}$$

$$y_1^* \cdot \left(-x_1^* - 2x_2^* + x_3^* - 10\right) = 0$$
$$y_2^* \cdot \left(5x_1^* + x_2^* + 4x_3^* - 6\right) = 0$$
$$\left(3 + y_1^* - 5y_2^*\right) \cdot x_1^* = 0$$
$$\left(-2 + 2y_1^* - y_2^*\right) \cdot x_2^* = 0$$
$$\left(7 - y_1^* - 4y_2^*\right) \cdot x_3^* = 0$$

Teorema de Holgura Complementaria (THC)

Precios Sombra

- Consideremos el problema en forma estándar:

$$(P)\ Max\ c'x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

- Supongamos que existe una solución básica factible óptima no degenerada, luego: $x_B = A_B^{-1}b > 0$ con A_B la base asociada
- Si añadimos una perturbación d en b lo suficientemente pequeña:

$$x_B = A_B^{-1}(b+d) > 0$$

  - Los costos reducidos no cambian al variar b: $\left(\bar{c}'_N = c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N\right)$

luego la base permanece óptima.

  - El costo óptimo original era: $c'x^* = c'_B x_B + c'_N x_N \quad \left(con\ x_N = 0\ y\ x_B = A_B^{-1}b\right)$

$$c'x^* = c'_B A_B^{-1} b$$

  - Por dualidad fuerte se sabe que: $c'x^* = y^{*}{}'b$

Precios Sombra

- Luego, la solución óptima del problema dual equivale a:

$$y^* = c_B A_B^{-1}$$

- El costo óptimo luego de la perturbación cambia a:

$$\begin{aligned} c' x^* &= c'_B \, A_B^{-1}(b+d) \\ &= y^*{}'(b+d) \end{aligned}$$

- Con esto se concluye que cada componente y_i del vector óptimo dual puede interpretarse como el **costo marginal (precio sombra)** por aumentar en una unidad la componente i-ésima del vector b.

Precios Sombra

- Ejemplo:

$$(P)\ Max\ z = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \qquad \boxed{z^* = 10{,}5}$$
$$-x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 10 \quad (y_1)$$
$$5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 6 \quad (y_2)$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$\boxed{y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}75 \end{pmatrix}}$$

$$(D)\ Min\ w = 10y_1 + 6y_2 \qquad \boxed{w^* = 10{,}5}$$
$$-y_1 + 5y_2 \geq 3 \quad (x_1)$$
$$-2y_1 + y_2 \geq -2 \quad (x_2)$$
$$y_1 + 4y_2 \geq 7 \quad (x_3)$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$
$$\boxed{x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}}$$

- Aumentar la segunda restricción de (P) en 1 genera un mejoramiento de la función objetivo de 1,75 unidades $z^* = 12{,}25$
  - ¡Aumentar la primera restricción no sirve de nada! (marginalmente)
    - No es activa en el óptimo
- Aumentar la tercera restricción de (D) en 1 genera un empeoramiento de la función objetivo de 1,5 unidades $w^* = 12$
  - ¡Estamos minimizando!
  - ¡Aumentar las dos primeras restricciones no sirve de nada! (marginalmente)

Dualidad

Basado en Bertsimas, Tsitsiklis

"Introduction to Linear Optimization"

Chap. 4

IN3701 – Modelamiento y Optimización

Nelson Devia C.