Dualidad

Dpto. Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

IN3701, Optimización

Contenidos

- Motivación
- Dualidad
- Análisis de Sensibilidad

Cotas Superiores al Valor Óptimo

Supongamos que tenemos el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{llllll}
\text{máx} & 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & +3x_4 & \\
\text{s.a.} & x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq 1 \\
 & 5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq 55 \\
 & -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq 3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}$$

Más que resolver el problema, vamos a tratar de configurar una estimación del valor óptimo z^* de la función objetivo.

Para conseguir una buena cota inferior para z^* hay que encontrar un punto donde se alcanza una $razonablemente$ buena solución factible.

Veamos:
$(0,0,1,0) \longrightarrow z^* \geq 5$
$(2,1,1,\frac{1}{3}) \longrightarrow z^* \geq 15$
$(3,0,2,0) \longrightarrow z^* \geq 22$

Cotas Superiores al Valor Óptimo

Está claro que este proceso de *adivinar* soluciones no es muy eficiente. Aún si se encuentra el óptimo no se tendrían pruebas de ello.

Ahora busquemos una cota superior para z^*: Multipliquemos la segunda restricción por $\frac{5}{3}$.

$$\frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4 \leq \frac{275}{3}$$

Por lo tanto, toda solución factible (en particular una óptima) satisface:

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq \frac{25}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + 5x_3 + \frac{40}{3}x_4 \leq \frac{275}{3}$$

$$\Rightarrow z^* \leq \frac{275}{3}$$

Podemos mejorar aún más la cota. Si sumamos las restricciones (2) y (3), tenemos:

$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 58$$

$$\Rightarrow z^* \leq 58$$

Cotas Superiores al Valor Óptimo

Veamos como se puede sistematizar este análisis:

Si multiplicamos la primera restricción por un número $y_1 \geq 0$, la segunda por $y_2 \geq 0$ y la tercera por $y_3 \geq 0$ y luego las sumamos tenemos: (en nuestro último ejemplo $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 1$)

$$y_1(x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) \leq y_1$$
$$y_2(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) \leq 55y_2$$
$$y_3(-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) \leq 3y_3$$
$$\downarrow$$
$$(y_1 + 5y_2 - y_3)x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)x_3 + (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)x_4$$
$$\leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

Queremos que el lado izquierdo de la ecuación anterior sea cota superior de $z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$. Esto se logra si:

$$y_1 + 5y_2 - y_3 \geq 4$$
$$-y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1$$
$$-y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 5$$
$$3y_1 + 8y_2 - 5y_3 \geq 3$$

Cotas Superiores al Valor Óptimo

Si los multiplicadores y_i son ≥ 0 y satisfacen estas 4 restricciones, tenemos que toda solución factible (x_1, x_2, x_3, x_4) satisface:

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

En particular, para el óptimo:

$$z^* \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

Como queremos una cota superior lo más ajustada posible nos queda el siguiente problema:

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & y_1 + 55y_2 + 3y_3 \\ \text{s.a.} & y_1 + 5y_2 - y_3 \geq 4 \\ & -y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ & -y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 5 \\ & 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 \geq 3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

El Problema Dual

Problema Primal (el original):

$$
\begin{array}{rll}
\text{(A) máx} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

El dual:

$$
\begin{array}{rll}
\text{(B) mín} & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\
\text{s.a.} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & j = 1, \ldots, n \\
& y_i \geq 0 & i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

Como vimos en nuestro ejemplo, toda solución factible del dual otorga una cota superior al valor óptimo del primal.

Más explícitamente: si $(x_1, \ldots, x_n)$ es solución factible primal y $(y_1, \ldots, y_m)$ es solución factible dual, tenemos:

$$
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{3}
$$

Este resultado se conoce como **Teorema Débil de Dualidad**.

Corolario

- Si $z_P = \infty$ entonces (D) es infactible.
- Si $z_D = -\infty$ entonces (P) es infactible.

Teorema

Suponga que tenemos un Problema lineal factible (P), y lo hemos transformado en un problema lineal (P') por una secuencia de operaciones del tipo:

- Reemplazar una variable libre con la diferencia de dos variables no-negativas.
- Reemplazar una desigualdad por una igualdad con una variable de holgura positiva.
- Eliminar restricciones de igualdad linealmente dependientes.

Entonces los duales (D) de (P) y (D') de (P') son equivalentes, es decir, o ambos son infactibles, o ambos tienen el mismo valor óptimo.

Teorema

(Dualidad Fuerte 1947-1951) Si P tiene solución óptima, entonces $z_P = z_D$.

Observación

El dual del dual es equivalente al problema primal.

Reglas para pasar del Primal al Dual

PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN	PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN
Restricciones	**Variables**
$\geq$	≥ 0
$=$	Irrestricta
$\leq$	≤ 0
Variables	**Restricciones**
≥ 0	$\leq$
Irrestricta	$=$
≤ 0	$\geq$

- Puede ocurrir que primal y dual sean infactibles?

Holgura Complementaria

Recordemos que teniamos los siguientes problemas primal y dual:

$$
\begin{array}{rlr}
\text{(P)}\,\text{máx} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlr}
\text{(D)}\,\text{mín} & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\
\text{s.a.} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & j = 1, \ldots, n \\
 & y_i \geq 0 & i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

Veamos una nueva forma de chequear que 2 soluciones factibles x^* o y^* primal y dual respectivamente son óptimas:

Teorema:
Sean $x_1^*, \dots, x_n^*$ solución factible del primal e $y_1^*, \dots, y_m^*$ solución factible del dual. Las siguientes son condiciones necesarias y suficientes para optimalidad simultánea de x^* e y^*:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \text{ o } x_j^* = 0 \text{ (o ambas) } \forall j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \text{ o } y_i^* = 0 \text{ (o ambas) } \forall i = 1, \dots, m$$

¿Cuándo $P := \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ tiene solución factible?

(Lema de Farkas 1896) Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Entonces exactamente una de las dos proposiciones es cierta:

1. Existe $x \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $Ax = b$.
2. Existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^t A \geq 0$ y $y^t b < 0$.

Significado Económico de las Variables Duales

$$\begin{array}{lll}
\text{(P) máx} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n
\end{array}$$

Supongamos que esta formulación proviene de una aplicación y tratemos de interpretar el significado de las variables duales:

- Supongamos que estamos maximizando ganancia en una fábrica de muebles.
- Cada x_j mide cuantas unidades de producto j (por ejemplo, mesas y sillas) se venden.
- Cada b_i especifica la cantidad disponible del recurso i (metal o madera).
- Cada a_{ij} expresa cantidad de recurso i requerido al fabricar una unidad del producto j.
- Cada c_j expresa ganancia en \$ por vender una unidad de producto j.

Lo que se espera es que cada variable dual y_i mida el valor unitario en $ del recurso

El siguiente teorema valida esta idea.

Teorema:
Si el problema primal (P) tiene al menos una solución óptima básica no degenerada
entonces existe $\varepsilon > 0$ con la siguiente propiedad:
Si $|t_i| \leq \varepsilon \quad \forall i = 1, \ldots, m$, entonces el problema

$$\begin{array}{rll} \text{máx} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i + t_i & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Tiene solución óptima y su valor óptimo es

$$\underbrace{z^*}_{\text{valor óptimo de (P)}} \quad + \quad \sum_{i=1}^{m} t_i \underbrace{y_i^*}_{\text{solución óptima del dual de (P)}}$$

Nota: La unicidad de $y_1^*, \ldots, y_m^*$ está garantizada por el Teorema anterior.

Lo que el Teorema dice es que con cada unidad extra de recursos i, el beneficio de la firma aumenta y_i^* pesos.

$$y_i^* \longrightarrow \text{ valor marginal del recurso } i$$

O sea que si tuvieramos que pagar cierta cantidad de dinero por una unidad extra de recurso i, sabemos que nos conviene pagar hasta y_i^* pesos.

- **Ojo:** el valor de los costos reducidos de las variables de holgura del problema primal de la ultima iteración del simplex multiplicados por -1 dan el valor de las variables de decisión del problema dual
- **Ojo 2:** $\pi^* = c_{B^*}^T B^{*-1}$ el precio sombra es también igual al valor de las variables duales de decisión.

Se desea diseñar un plan de producción de máximo benficio para dos posibles productos que se fabrican utilizando 3 insumos.
Cada insumo tiene disponibilidad máxima.
El modelo lineal es el siguiente:

$$
\begin{array}{llll}
\text{máx}\, z = & x_1 & +1,5x_2 & \\
\text{s.a.} & 2x_1 & +2x_2 & \leq 160 \\
 & x_1 & +2x_2 & \leq 120 \\
 & 4x_1 & +2x_2 & \leq 280 \\
 & & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

- Resuelva y analice que recursos son limitantes, que beneficios adicionales puede obtener como?

Análisis de Sensibilidad

- **Objetivos:** Identificar los parámetros para los cuales la solución óptima es más sensible, es decir aquellos que al sufrir una pequeña variación en su valor implican un mayor impacto en la solución óptima.

- Los parámetros del modelo (c_j, b_i, a_{ij}) se los asume como constantes conocidas, pero en la práctica estos valores suelen ser estimaciones por lo que es interesante analizar el efecto que tienen sobre la solución posibles errores en los parámetros.

- Buscaremos intervalos o rangos de variación de los valores del lado derecho (b_i) y de los coeficientes de la función objetivo (c_j) que permiten que la base óptima obtenida siga siendo óptima (también puede hacerse para los coeficientes a_{ij})

- Variación del punto óptimo:
  - Coeficiente de la función objetivo
    - Variable x es básica
    - Variable x es no básica
  - Coeficiente del vector lado derecho (b)
- Variación del precio sombra:
  - Coeficiente de la función objetivo
    - Variable x es básica
    - Variable x es no básica
  - Coeficiente del vector lado derecho (b)

Ejemplo

Tenemos el siguiente problema de una dieta alimenticia, donde x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 son las cantidades de huevos, papas, carnes, leche y espinacas, que se han de incluir en la dieta, respectivamente.

Los requerimientos se refieren a cantidades mínimas de fierro (Fe) y vitamina B. La función objetivo representa el costo total (en \$).

Los contenidos de fierro y vitamina B, junto con los costos y requerimientos mínimos se muestran en la siguiente tabla:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	
1	0	1	1	2	-1	0	21	Fierro
0	1	2	1	1	0	-1	12	Vit. B
20	10	31	11	12	0	0	z	Costo

En el óptimo tenemos que:

x_B	$\bar{b}$	B^{*-1}	
x_4	3	-1	2
x_5	9	1	-1

O sea que la dieta óptima se compone de 3 unidades de leche y 9 unidades de espinaca.

El costo total es $z^* = \$141$.

- Cuanto podría variar el precio del huevo sin modificar la dieta optima?
- Qué ocurre con la dieta óptima si el precio de la leche varia?
- Habrá que modificar la dieta si el requerimiento de fierro aumenta disminuye?

Análisis Post-Óptimal

Hemos visto bajo que rangos la solución óptima se mantiene. Ahora, cómo usar la solución que tenemos para encontrar el nuevo óptimo si en alguno de los parámetros nos salimos del rango?

Allí aparecen los ejercicios adicionales que planteamos recientemente.

La idea es aplicar el SIMPLEX a partir de la solución que tenemos, si lo que se modificó fue un coeficiente de la función objetivo, e iterar desde allí (buscando el j tal que $\overline{c}_j < 0$ para hacerlo entrar a la base).

En cambio, si se modificó el vector b y se perdió factibilidad primal, entonces podremos iterar con SIMPLEX en el problema dual, a partir del correspondiente óptimo del dual original.